Thermodynamik
Serie 13

Aufgabe 13.1 Schall

Berechne die Schallgeschwindigkeit c in einem idealen Fluidum. Starte dazu mit den Euler-Gleichungen (Skript S.124) ohne äussere Kräfte ($\mathbf{F} = 0$):

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \nabla(\rho\,\mathbf{u}) &= 0\ , \\ D_t\,\mathbf{u} + \frac{1}{m\rho}\nabla(\rho T) &= 0\ , \\ \frac{3}{2}\,D_t T + T\nabla\cdot\mathbf{u} &= 0\ , \end{aligned} \tag{12.16}$$

wobei wir die Dichte $\rho = mn$ und $k_B = 1$ gesetzt haben. Die substantielle Ableitung ist

$$D_t \equiv \partial_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\ . \tag{12.15}$$

Entwickle diese Gleichungen in 1. Ordnung um das statische Gleichgewicht ($\mathbf{u}_0 = 0$) für kleine Abweichungen in T, ρ und $\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} T &= T_0 + T'\ , \\ \rho &= \rho_0 + \rho'\ , \\ \mathbf{u} &= \mathbf{u}'\ , \end{aligned}$$

wobei $T_0, \rho_0 = \text{const.}$ Eliminiere aus dem resultierenden Gleichungssystem T' und bestimme anschliessend mit Fouriertransformation die Schallgeschwindigkeit. Zeige ausserdem, dass es nur longitudinalen Schall geben kann.

Aufgabe 13.2 Stokessches Gesetz

Betrachte eine Kugel mit Radius a, die sich in einer inkompressiblen ($\nabla\cdot\mathbf{u} = 0$) Flüssigkeit befindet. Die uniforme Strömungsgeschwindigkeit weit weg von der Kugel sei $\mathbf{u}_0$. Berechne zuerst die stationäre Strömungsverteilung um die Kugel unter der Annahme sehr grosser Viskosität η (d.h. $(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} \ll$ Viskositätsterm) und mit geeigneten Randbedingungen für $\mathbf{u}$ auf der Kugeloberfläche. Zeige, dass die Kraft auf die Kugel gegeben ist durch

$$\mathbf{F} = -\int_{r=a} \mathbf{e}_r \cdot (p + \hat{\mathbf{p}})\,\mathrm{d}\sigma = 6\pi\eta a \mathbf{u}_0\ .$$

Hinweis: Benutze für diese Aufgabe die Navier-Stokes Gleichung (Skript S.127):

$$mn\,D_t\,\mathbf{u} + \nabla p = -\nabla\cdot\hat{\mathbf{p}}\ , \tag{12.27}$$

mit $p = nk_BT$. Zeige, dass mit den oben genannten Annahmen eine Laplace Gleichung für p folgt und verwende für p den Lösungsansatz

$$p = p_0 + p_1\eta\frac{\cos\vartheta}{r^2}\ .$$

Berechne mit diesem p die konvektive Strömung $\mathbf{u}$ – aus den Randbedinungen lassen sich dann der Koeffizient p_1 und anschliessend das Integral für $\mathbf{F}$ bestimmen.