Allgemeine Mechanik
Serie 5

Aufgabe 5.1 Phasenportrait gedämpfter Schwingungen

Wir betrachten einen gedämpften Oszillator,

$$m\ddot{x} = -fx - r\dot{x}. \tag{1}$$

a.) Zeichne das Phasenportrait in der $(x, \dot{x})$-Ebene für die Anfangsbedingung $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) \in \{0, 1, -1, -2\}$ in den 4 Fällen, die im Skript auf S. 40 ganz oben aufgelistet werden. Die Abbildung sollte mit dem Computer angefertigt werden, beispielsweise mit `Matlab`, `Mathematica` oder `Python/Matplotlib`.

b.) Beschreibe das Verhalten des Systems anhand der Phasenportraits.

Aufgabe 5.2 Gekoppelte Federn

Wir betrachten ein System von N identischen Teilchen der Massen m mit Koordinaten $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$, die auf einem Ring angeordnet sind (siehe Abbildung 1). Die Teilchen sind über Federn der Federkonstante f miteinander gekoppelt, wobei wir annehmen, dass die Federkräfte auf jedes Teilchen genau entlang der Tangentialen wirken.

a.) Finde die Bewegungsgleichungen für $\mathbf{x}$ in der Form $\ddot{\mathbf{x}} = cA\mathbf{x}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

b.) Das System hat eine zyklische Symmetrie:

$$S : (x_1, x_1, \dots, x_N) \to (x_2, x_3, \dots, x_N, x_1). \tag{2}$$

Finde die Matrixdarstellung für S und diagonalisiere diese, d.h. finde Eigenvektoren $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^N$ und Eigenwerte $\lambda_k \in \mathbb{C}$, so dass

$$S\mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k \tag{3}$$

erfüllt ist.

c.) Warum lassen sich die Bewegungsgleichungen nun deutlich vereinfachen?

d.) Verwende die Entwicklung $\mathbf{x}(t) = \sum_k u_k(t)\mathbf{e}_k$ und zeige, dass

$$\ddot{u}_k = -\omega_k^2 u_k. \tag{4}$$

Finde die ω_k. Was bedeuten diese?

e.) Beschreibe die Lösungen, die $\lambda_k = \pm 1$ entsprechen.

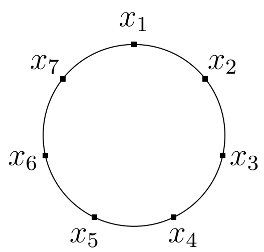

Abbildung 1: Anordnung von 7 identischen Teilchen auf einem Ring.