Allgemeine Mechanik
Serie 6

Aufgabe 6.1 Koordinatenunabhängingkeit der Euler-Lagrange Gleichungen

Sei $\gamma(t) = \{(t, \mathbf{q}) : \mathbf{q} = \mathbf{q}(t), t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$ eine Kurve in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Weiter sei $F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ die Funktion von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für welche das Funktional $\Phi = \int_{t_0}^{t_1} F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)dt$ die Länge der Kurve angibt.

a.) Welche Form nimmt das Funktional Φ in kartesischen Koordinaten an? Welche in Polarkoordinaten?

b.) Gib die Euler-Lagrange Gleichungen in beiden Koordinatensystemen an.

c.) Löse die Differentialgleichungen in Polarkoordinaten.

Aufgabe 6.2 Extremal der Lagrangefunktion

Betrachte ein freies Teilchen mit der Lagrangefunktion $L = T = \frac{m\dot{\mathbf{x}}^2}{2}$. Die Bahn $\mathbf{x}(t)$, welche die Euler-Lagrange Gleichungen löst, ist ein Extremum des Wirkungsfunktionals $S = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}, t)dt$. Zeige, dass in diesem Fall das Extremum ein Minimum ist.

Aufgabe 6.3 Lagrangefunktion im homogenen Schwerefeld

Abbildung 1. schematisiert einen ebenen Pendel mit Masse m_2 im homogenen Schwerefeld, wobei sich der Aufhängungspunkt (der selbst die Masse m_1 besitzt) entlang einer horizontalen Geraden bewegen kann.

a.) Finde die Lagrangefunktion.

Tipp: Drücke die kartesischen Koordinaten der Masse m_2 durch die x-Koordinate der Masse m_1 und den Winkel ϕ aus.

b.) Bestimme die Bewegungsgleichungen und linearisiere sie.

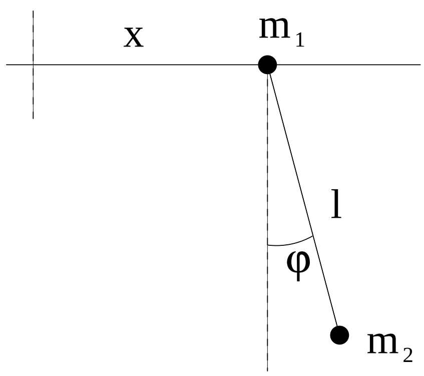

Abbildung 1: Ebenes Pendel