Allgemeine Mechanik
Serie 7

HS 10
Prof. R. Renner

Aufgabe 7.1 Variationsrechnung mit Nebenbedingung

In dieser Aufgabe soll die Fläche unter einer Kurve bei gegebener Kurvenlänge maximiert werden.

a.) Oftmals hängt der Integrand in der Gleichung

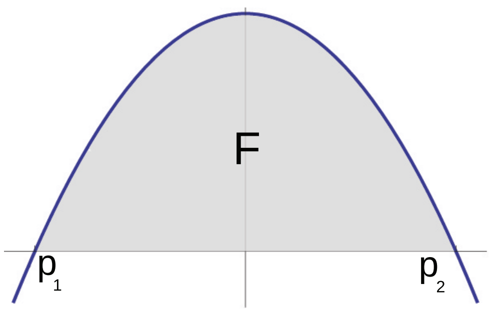
$$S[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} dx\, L[y(x), y'(x), x]$$

nicht explizit von x ab. Zeige, dass in diesem Fall

$$H := y' \frac{\partial L}{\partial y'} - L = \text{const.}$$

gilt, falls $y(x)$ eine Lösung der Euler-Lagrange Gleichung ist.

b.) Verwende Teilaufgabe a.) um die Kurve mit Länge $l > a$ von $p_1 = (-a/2, 0)$ nach $p_2 = (a/2, 0)$ zu finden, welche die Fläche zwischen x-Achse und Kurve maximiert. Dabei kannst Du davon ausgehen, dass sich die Kurve als Graph einer Funktion $y(x)$ darstellen lässt.



Aufgabe 7.2 Rheonome Zwangsbedingung

Die Beispiele im Skript zum Lagrange Formalismus behandeln holonome Zwangsbedingungen, die die Zeitkoordinate t nicht enthalten. Hier soll nun eine Situation betrachtet werden, in der eine der holonomen Zwangsbedingungen von der Zeit abhängt. Eine zeitabhängige Zwangsbedingung heisst "rheonom".
Betrachte einen geraden Draht, der die z-Achse im Winkel α schneidet. Ausserdem rotiert der Draht mit Winkelgeschwindigkeit ω um die z-Achse. Eine Perle, die unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei auf dem Draht gleitet, wird ohne Anfangsgeschwindigkeit im Schnittpunkt vom Draht mit der z-Achse losgelassen.

a.) Formuliere die Zwangsbedingungen.

b.) Löse die Bewegungsgleichung.

c.) Ist die Gesamtenergie erhalten?