Allgemeine Mechanik
Serie 9

Aufgabe 9.1 Variationsprinzip

a.) Um das Variationsprinzip zu rekapitulieren wollen wir eine verallgemeinerte Lagrange Funktion anschauen. Betrachte eine Lagrange Funktion $L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t)$ die auch noch von den zweiten Ableitungen von q nach der Zeit abhängt. Zeige, dass die Euler-Lagrange Gleichung für diese Funktion durch

$$\left(\frac{\partial}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{q}} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial}{\partial \ddot{q}} \right) L(q, \dot{q}, \ddot{q}, t) = 0$$

gegeben ist, wobei wir davon ausgehen, dass weder q noch $\dot{q}$ an den Randpunkten varriiert werden, d.h. $\delta q(t_0) = \delta q(t_1) = \delta \dot{q}(t_0) = \delta \dot{q}(t_1) = 0$.

b.) Das Variationsprinzip von Maupertuis ist gegeben durch

$$\delta \int_{(1)}^{(2)} ds \sqrt{E - V(\mathbf{x})} = 0 \ .$$

Zeige, dass die Differentialgleichung der Bahn durch

$$2\sqrt{E - V(\mathbf{x})}\frac{d}{ds}\left(\sqrt{E - V(\mathbf{x})}\frac{d\mathbf{x}}{ds} \right) = -\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x})$$

gegeben ist und dass diese Äquivalent zur Newton'schen Gleichung $\mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{x}}$ ist, wobei $\mathbf{F} = -\nabla_{\mathbf{x}} V(\mathbf{x})$ ist.

Aufgabe 9.2 Energieerhaltung

Ein Teilchen der Masse m, das sich mit der Geschwindigkeit $\mathbf{v}_1$ bewegt, geht aus dem einen Halbraum, in dem seine potentielle Energie konstant und gleich U_1 ist, in den anderen Halbraum über, wo diese Energie auch konstant, aber gleich U_2 ist. Bestimme die Änderung der Bewegungsrichtung des Teilchens.

Aufgabe 9.3 Lennard-Jones-Potential

Die klassische Wechselwirkung zwischen zwei Gasmolekülen mit Masse m kann durch das Potential

$$V(r) = -\frac{2A}{r^6} + \frac{B}{r^{12}}$$

modelliert werden, wobei die Konstanten $A > 0$ und $B > 0$ sind und $r =\mid r_1 - r_2 \mid$ der Abstand zwischen den Molekülen ist.

a.) Gib die Hamiltonfunktion des Systems an. Verwende dazu Schwerpunkts- und Relativkoordinaten. Benutze Kugelkoordinaten für die Relativbewegung der Moleküle.

b.) Gib den Abstand der Moleküle an, bei dem die Energie minimal ist.