Allgemeine Mechanik
Serie 10

Aufgabe 10.1 Symplektische Geometrie

Gegeben sei eine n-Form F im dreidimensionalen Raum. Berechne die äussere Differentiation dF für $n = 0, 1, 2$.

a.)
- n=0 Hier ist F nur eine skalare Funktion. Zeige, dass $dF = \mathrm{grad}F$, wobei $\mathrm{grad}F$ als Vektor in der Basis $e_i = dx^i$ aufgefasst werden kann.
- n=1 Zeige, dass man dF als $\mathrm{rot}\mathbf{F}$ schreiben kann, wobei $\mathbf{F}$ ein Vektor in der Basis $e_i = dx^i$ ist und $\mathrm{rot}\mathbf{F}$ ein Vektor in der Basis $f_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}dx^j \wedge dx^k$ ist.
- n=2 Zeige, dass man dF als $\mathrm{div}\mathbf{F}$ schreiben kann, wobei $\mathbf{F}$ ein Vektor in der Basis $f_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}dx^j \wedge dx^k$ ist und $\mathrm{div}\mathbf{F}$ ein Vektor im eindimensionalen Raum mit der Basis $s = dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$ ist.

Tipp: Benutze Gleichung (6.5.8) im Skript für den Fall das φ eine 0-Form ist:

$$d(\varphi\psi) = d\varphi \wedge \psi + \varphi \wedge d\psi \qquad (\varphi \text{ ist 0-Form})$$

Weiterhin gilt, dass zweimaliges Anwenden von d immer Null ergibt.

b.) Zeige mit Hilfe der im Skript erwähnten Eigenschaften des d-Operators:

- Aus $\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$ folgt, dass ein Vektorfeld $\mathbf{A}$ existiert, sodass $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$.
- Aus $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0$ folgt, dass ein Skalarfeld φ existiert, sodass $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$.

Aufgabe 10.2 Kanonische Transformation

Gegeben sei die Hamiltonfunktion des harmonischen Oszillators

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2.$$

a.) Berechne die Bewegungsgleichung für $q(t)$ und $p(t)$.

b.) Zeige, dass die Transformation

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2P}{m\omega}}\sin Q \\ p &= \sqrt{2Pm\omega}\cos Q \end{aligned} \tag{1}$$

eine kanonische Transformation ist.

c.) Berechne die Bewegungsgleichung für $Q(t)$ und $P(t)$ und vergleiche mit a) durch Einsetzen in (1).

Aufgabe 10.3 Erhaltungsgrössen

Der Poissonsche Satz (S. 88) besagt, dass die Poissonklammer zweier Erhaltungsgrössen wieder eine Erhaltungsgrösse ist. Zeige dies für die Komponenten des Drehimpulses. Berechne die Poissonklammer $\{L_i, L_j\}$ und zeige, dass

$$\{L_i, L_j\} = \epsilon_{ijk} L_k.$$