Quantenmechanik I. Übung 7.

HS 10 *Abgabe:* Di 16. November 2010

1. Verschiebungsoperatoren und kohärente Zustände

i) Seien $U(s) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}ps/\hbar}$ und $\tilde{U}(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt/\hbar}$ die Translationen in Orts und Impulsraum, und $V(\alpha) = \mathrm{e}^{\alpha a^* - \bar{\alpha} a}$, wie im Skript. Zeige, dass i.A. $V(\alpha)$ und $V(\beta)$ nur bis auf eine Phase kommutieren:

$$V(\alpha)V(\beta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(\alpha,\beta)} V(\beta)V(\alpha) \; . \tag{1}$$

Wie lautet die entsprechende Beziehung zwischen $U(s)\tilde{U}(t)$ und $\tilde{U}(t)U(s)$? Wann kommutieren $V(\alpha)$, $V(\beta)$ bzw. $U(s)$, $\tilde{U}(t)$?

ii) Die kohärenten Zustände $|\alpha\rangle = V(\alpha)\,|0\rangle$ (mit $a\,|0\rangle = 0$, $\langle 0|0\rangle = 1$) sind nicht orthogonal. Zeige:

$$\langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle = \exp\bigl(-\frac{1}{2}\,|\alpha_1 - \alpha_2|^2 + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}(\bar{\alpha}_1 \alpha_2)\bigr) \; . \tag{2}$$

Hinweis: Führe die Berechnung von $\langle \alpha_1 | \alpha_2 \rangle$ auf jene von $\langle 0|\, V(\alpha)\,|0\rangle$ zurück.

iii) Zeige, dass die Linearkombinationen der kohärenten Zustände dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegen, d.h.

$$\langle \psi | \alpha \rangle = 0 \; , \quad (\alpha \in \mathbb{C}) \qquad \Longrightarrow \qquad |\psi\rangle = 0 \; .$$

Hinweis: Betrachte die Funktion $f(\alpha) = \mathrm{e}^{|\alpha|^2/2} \langle \psi | \alpha \rangle$ und verwende, dass die Eigenzustände $|n\rangle$, ($n \in \mathbb{N}$) des harmonischen Oszillators eine orthonormierte Basis bilden.

iv) Leite die Zerlegung der Eins in Projektoren $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ auf kohärente Zustände her:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{C}} |\alpha\rangle \langle\alpha|\, d(\mathrm{Re}\,\alpha) d(\mathrm{Im}\,\alpha) = \mathbb{1} \tag{3}$$

bzw.

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int |x,p\rangle \langle x,p|\, dx dp = \mathbb{1} \; , \tag{4}$$

mit $|x,p\rangle := |\alpha\rangle$ für $\sqrt{2\hbar}\alpha = x + \mathrm{i}p$.

Hinweise: Wegen (iii) genügt es, Matrixelemente $\langle\beta| \cdot |\gamma\rangle$ der vorkommenden Ausdrücke zu betrachten. Verwende den Hinweis aus Aufgabe 6.1 zur Berechnung der auftretenden Gaussschen Integrale. *Bemerkung:* Heuristisch entspricht nach (4) jeden Phasenvolumen $2\pi\hbar$ ein quantenmechanischer Zustand, wie bei der Sommerfeld-Quantisierung.

2. Ein halber harmonischer Oszillator

Betrachte ein Teilchen in einer Dimension und im Potential

$$V(x) = \begin{cases} \infty \; , & (x < 0) \; , \\ \frac{1}{2}x^2 \; , & (x > 0) \; . \end{cases}$$

Finde Eigenwerte und Eigenfunktionen des entsprechenden Hamiltonoperators in Einheiten $m = \hbar = 1$.

Hinweis: Der divergente Teil des Potentials kann durch eine Randbedingung $\psi(x = 0) = 0$ für die Wellenfunktion auf $x \geq 0$ ersetzt werden.

3. Partnerpotentiale

i) Betrachte die beiden Hamiltonoperatoren auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

$$H_\pm = -\frac{d^2}{dx^2} + q^2(x) \pm q'(x) \tag{5}$$

für eine reelle Funktion $q(x)$. Zeige:

a) $H_\pm \geq 0$.

b) Die Partner $H_\pm$ haben dieselben Eigenwerte λ mit der möglichen Ausnahme von $\lambda = 0$.

c) $\lambda = 0$ kann Eigenwert von höchstens einem Partner sein. Für welche $q(x)$ ist dies der Fall? Die Anwort ist "topologisch": sie ändert sich nicht, wenn $q(x)$ auf einem beschränkten Intervall abgeändert wird.

Hinweise: Für welche Funktion $q(x)$ ist (5) mit dem harmonischen Oszillator verwandt? Passe die Definition des Vernichtungsoperators a so an, dass $H_\pm = a_\mp a_\pm$ mit $a_- = a$, $a_+ = a^*$, und verwende ihn wie in der Vorlesung. Zu (c): formuliere die Antwort anhand einer Stammfunktion $Q(x)$ von $q(x)$, ($Q' = q$). *Bemerkung* (für die fernere Zukunft): Die Partner $H_\pm$ bilden ein supersymmetrisches Paar.

ii) Beschreibe in Worten die Partnerpotentiale für $q(x) = x + gx^2$, (g klein). Zeige, dass $H_\pm$ für $g \neq 0$ unitär äquivalent sind. Diskutiere den Limes $g \to 0$ in Bezug auf die Anwort auf (c).

iii) Ein Analogon von (5) auf $L^2(\mathbb{R}^n)$ ist

$$H_\pm = -\Delta + \vec{q}(x)^2 \pm \operatorname{div} \vec{q}(\vec{x}) \,. \tag{6}$$

Eigenschaften (a-c) gelten dank kleinsten Anpassungen der Herleitung im Fall $n = 1$. Zeige bloss: Ein notwendiges Kriterium dafür, dass $\lambda = 0$ ein Eigenwert von H_+ oder H_- ist, ist, dass $\vec{q}$ ein Gradientenfeld ist ($\vec{q} = \vec{\nabla} Q$).