Quantenmechanik I. Übung 8.

HS 10 *Abgabe:* Di 23. November 2010

1. Eichtransformationen

Einem Teilchen in einem zeitunabhängigen elektromagnetischen Feld entspricht der Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2m}\big(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x})\big)^2 + e\varphi(\vec{x}) \qquad \text{auf } L^2(\mathbb{R}^3)$$

Zeige: Unter einer ebenfalls zeitunabhängigen Eichtransformation bleibt das Spektrum des Hamiltonoperators invariant.

2. Teilchen in der Ebene mit transversalem magnetischen Feld

Die Rotation rot $\vec{A}(\vec{x})$ von Feldern $\vec{A}(\vec{x}) = (A_1, A_2)$ in der Ebene $\mathbb{R}^2 \ni \vec{x} = (x_1, x_2)$ ist ein Skalarfeld,

$$B(\vec{x}) \equiv \operatorname{rot} \vec{A} = \partial_1 A_2 - \partial_2 A_1 \ .$$

Man kann es als ein magnetisches Feld in $\mathbb{R}^3$ auffassen, welches transversal zur Ebene,

$$(0, 0, B) = \operatorname{rot}(A_1, A_2, 0) \ ,$$

und unabhängig von x_3 ist.

Finde die Eigenwerte, ihre Entartung, sowie die zugehörigen Eigenfunktionen ψ eines Elektrons in einem konstanten magnetischen Feld B,

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A})^2 \qquad \text{auf } L^2(\mathbb{R}^2) \ ,$$

mit den zwei Eichungen (a) $\vec{A} = (-Bx_2, 0)$ und (b) $\vec{A} = \frac{B}{2}(-x_2, x_1)$. Im Fall (a) reduziert der Ansatz $\psi(x_1, x_2) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx_1}\varphi(x_2)$ das Problem auf einen 1-dimensionalen harmonischen Oszillator. Im Fall (b) hingegen ist das Problem mit dem 2-dimensionalen harmonischen Oszillator verwandt und kann mit Hilfe von Erzeugungsoperatoren gelöst werden,

$$a_\pm^* = \frac{1}{\sqrt{2m\omega\hbar}}\big(m\omega\frac{x_1 \pm \mathrm{i}x_2}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{p_1 \pm \mathrm{i}p_2}{\sqrt{2}}\big)$$

(unter der Annahme, dass $\omega := eB/2mc > 0$) für rechts- $(+)$, respektive links-zirkulare $(-)$ Anregungen, zusammen mit ihren Adjungierten, den Vernichtungsoperatoren $a_\pm$. Wie lauten ihre Kommutationsrelationen und welche Bedeutung hat $N_\pm := a_\pm^* a_\pm$?

3. Eigenwertspektrum des Wasserstoffatoms

Ziel der Aufgabe ist es, die Energien der gebundenen Zustände des H-Atoms auf alternativen (supersymmetrischen) Wege zu finden (Schrödinger 1940). In Einheiten $\hbar^2/2m = e^2 = 1$ ist der radiale Hamiltonoperator für Wellen mit Drehimpuls $l = 0, 1, 2, \ldots$

$$H_l = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{1}{r} \qquad \text{auf } L^2[0, \infty) \ .$$

i) Bestimme E_l so, dass $H_-^{(l)} = H_l - E_l$

- von der Form wie in Übung 7, Gl. (5) ist;
- Eigenwert 0 hat.

Hinweis: Ansatz: $q(r) = a + br^{-1}$.

ii) Zeige: Der Partner ist $H_+^{(l)} = H_{l+1} - E_l$.

iii) Bestimme die (negativen) Eigenwerte von H_l mit Hilfe der Eigenschaften (a-c) aus Aufgabe 7.3.

4. Stabilität des Wasserstoffatoms

Die Energien des Wasserstoffatoms

$$H = \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} - \frac{e^2}{|\vec{x}|}$$

sind klassisch nicht nach unten beschränkt, quantenmechanisch jedoch schon. Als heuristischer Grund dieser Stabilität wird oft die Heisenbergsche Unschärferelation vorgebracht: Ein Elektron im Abstand r vom Kern hat Impuls von der Ordnung $\Delta p \sim \hbar/r$, also Energie $\sim \hbar^2/(2mr^2) - e^2/r$, was als Funktion von $r > 0$ ein Minimum besitzt.

i) Die Überlegung taugt so nicht: Aus $\langle p_i^2\rangle_\psi \geq \langle p_i^2\rangle_\psi - \langle p_i\rangle_\psi^2 = \langle(\Delta p_i)^2\rangle_\psi$ und desgleichen für x_i folgt zwar

$$\langle \vec{p}^{\,2}\rangle\langle \vec{x}^{\,2}\rangle \geq \sum_{i=1}^{3}\langle p_i^2\rangle_\psi\langle x_i^2\rangle_\psi \geq \frac{3\hbar^2}{4}$$

und damit

$$\langle H\rangle_\psi \geq \frac{3\hbar^2}{8m}\frac{1}{\langle \vec{x}^{\,2}\rangle_\psi} - e^2\Big\langle\frac{1}{|\vec{x}|}\Big\rangle_\psi\ ;$$

aber (zeige!) es gibt Zustände $|\psi\rangle$, die die rechte Seite beliebig gross und negativ machen.

Hinweis: Wähle $\psi(\vec{x})$ als Superposition zweier Wellenfunktionen: eine weg vom Kern, die andere sehr nahe.

ii) Eine in dieser Hinsicht bessere Unschärferelation ist die Hardy-Ungleichung

$$-\Delta \geq \frac{1}{4\,\vec{x}^{\,2}} \tag{1}$$

(im Sinne quadratischer Formen, d.h. quantenmechanischer Erwartungswerte). Zeige damit: $H \geq -C$ für ein $C > 0$.

Hinweis: $\vec{p}^{\,2} = -\hbar^2\Delta$.

iii) Beweise (1).

Hinweis: Verwende Eigenschaft (a) aus Aufgabe 7.3(iii) für ein passendes Vektorfeld $\vec{q} = \vec{\nabla}Q$. Lege dieses zunächst nur bis auf ein Vielfaches fest.