Quantenmechanik I. Übung 10.

HS 10 *Abgabe:* Di 7. Dezember 2010

1. Streuung von Elektronen an neutralen Wasserstoffatomen

Zur Vertiefung der Streutheorie soll die Einzelstreuung von Elektronen an neutralen Wasserstoffatomen betrachtet werden. Wir nehmen an, dass sich die H-Atome dabei im Grundzustand befinden.

i) Nach (4.8) und nach (4.14) ist der Grundzustand des Wasserstoffatoms gegeben durch

$$\psi_{100}(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \mathrm{e}^{-|\vec{x}|/a} \quad \text{mit} \quad a = \frac{\hbar^2}{me^2} \quad \text{(Bohrscher Radius)}$$

Unter der Annahme, dass die Ladungsdichte des Hüllenelektrons proportional zum Betragsquadrat der Wellenfunktion des jeweiligen Zustandes ist (siehe (1.5) 'Elektrodynamik' Graf), sieht das einfallende Elektron am Ort $\vec{x}_0$ in guter Näherung das Potential

$$V_{\mathrm{e}}(\vec{x}_0) = Ze^2 \int \mathrm{d}^3x \frac{|\psi_{nlm}(\vec{x})|^2}{|\vec{x}_0 - \vec{x}|}$$

Berechne das effektive Streupotential unter zusätzlicher Berücksichtigung des Coulombpotentials des Kerns und zeige, dass es sich um ein Zentralpotential handelt.

Hinweis: Verwende bei der Berechnung folgende Formeln:

$$\int_0^x \mathrm{d}y \mathrm{e}^{-ay} y^n = \frac{n!}{a^{n+1}} \left(1 - \mathrm{e}^{-ax} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(ax)^\nu}{\nu!}\right) \quad \text{sowie} \quad \int_x^\infty \mathrm{d}y \mathrm{e}^{-ay} y^n = \frac{n!}{a^{n+1}} \mathrm{e}^{-ax} \sum_{\nu=0}^{n} \frac{(ax)^\nu}{\nu!}$$

ii) Bestimme die Streuamplitude sowie den totalen Wirkungsquerschnitt in erster Bornscher Näherung und zeige, dass für kleine Teilchenenergien $ka \ll 1$ dieser sich reduziert zu dem einer harten Kugel

$$\sigma_B \approx 4\pi a^2$$

2. Gestörtes 2-Level System

Betrachte den Hamiltonoperator

$$H = E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2| + \frac{\lambda}{2}\big(|1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\big)$$

eines 2-Level Systems.

a) Bestimme die Eigenwerte und die Eigenvektoren von H.

b) Bestimme die Eigenwerte von H störungstheoretisch (erste und zweite Ordnung).

c) Bestimme die exakten Eigenwerte im Fall $E_1 = E_2 = E$.

d) Bestimme die Eigenwerte im Fall c) im Rahmen nicht-entarteter Störungstheorie und beschreibe die auftretenden Probleme.

3. Feynmann-Hellman Satz

Sei H_λ eine Familie von Hamiltonoperatoren (insbesondere hängen die Eigenvektoren und Eigenwerte von λ ab). Zeige, dass

$$\frac{\partial E_\lambda}{\partial \lambda} = \left\langle \psi_\lambda \middle| \frac{\partial H_\lambda}{\partial \lambda} \middle| \psi_\lambda \right\rangle ,$$

für $\|\psi_\lambda\| = 1$.