Quantenmechanik I. Übung 12.

HS 10 *Abgabe:* Di 21. Dezember 2010

1. Eichung projektiver Darstellungen von Symmetriegruppen $\cong (\mathbb{R}, +)$
Nehme an, $(\mathbb{R}, +)$ (bspw. Zeitevolution oder Translation in einer Dimension) sei eine Symmetriegruppe eines quantenmechanischen Systems mit Hilbertraum $\mathcal{H}$. Sei U eine beliebige projektive Darstellung dieser Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ auf $\mathcal{H}$, so dass $U : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$ und

$$U(t_1)U(t_2) = \omega(t_1, t_2)U(t_1 + t_2) \tag{1}$$

mit $|\omega(t_1, t_2)| = 1$. Nehme an, $\omega(t_1, t_2)$ sei differenzierbar in t_1, t_2. Ziel dieser Aufgabe ist der Beweis der Existenz von $\phi : \mathbb{R} \to \{e^{i\alpha} | \alpha \in [0, 2\pi)\}$ mit der Eigenschaft, dass

$$\tilde{U}(t_1)\tilde{U}(t_2) = \tilde{U}(t_1 + t_2) \tag{2}$$

für

$$\tilde{U}(t) := \phi(t)U(t). \tag{3}$$

i) Zeige, dass

$$\omega(x, y)\omega(x + y, z) = \omega(x, y + z)\omega(y, z) \tag{4}$$

für alle $x, y, z \in \mathbb{R}$. Für $y = 0$ ergibt sich also

$$\omega(x, 0) = \omega(0, z) = \omega(0, 0) \tag{5}$$

für alle $x, z \in \mathbb{R}$.

ii) Zeige, dass

$$\omega(t_1, t_2)\phi(t_1)\phi(t_2) = \phi(t_1 + t_2) \tag{6}$$

eine hinreichende und notwendige Bedingung für die Existenz der gesuchten Funktion $\phi(\cdot)$ ist.

iii) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass

$$\omega(x, 0) = \omega(0, z) = \omega(0, 0) = 1 \tag{7}$$

für alle $x, z \in \mathbb{R}$ (wähle $\tilde{\phi}(t) := \omega(0, 0)^{-1}$). Folgere hieraus, dass $\phi(0) = 1$, falls $\phi(t)$ Gleichung (6) erfüllt, und verifiziere, dass auch $\phi(t)e^{i\alpha t}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, der Bedingung (6) genügt, wenn $\phi(t)$ die Bedingung (6) erfüllt. Folgere aus dieser Freiheit in der Wahl von α, dass die Existenz der gesuchten Funktion ϕ äquivalent ist zur Existenz einer Funktion ϕ mit der zusätzlichen Eigenschaft $\phi'(0) = 0$.

iv) Zeige, dass (6), $\phi(0) = 1$ und $\phi'(0) = 0$ die Gleichung

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\omega(x, y)\right|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial x}\ln\phi(x). \tag{8}$$

implizieren.

v) Wir kehren nun den Spiess um, indem wir $\phi(t)$ als Lösung des Anfangswertproblems

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\omega(x,y)\right|_{y=0} = \frac{\partial}{\partial x}\ln\phi(x),$$
$$\phi(0) = 1 \tag{9}$$

ansetzen. Um den Existenzbeweis abzuschliessen, muss gezeigt werden, dass die Lösung von (9) die hinreichende Bedingung (6) tatsächlich erfüllt.

2. Streuung an der harten Kugel

Gegeben sei das Potential

$$V(\vec{x}) = \begin{cases} \infty\,, & |\vec{x}| \leq r_0 \\ 0\,, & |\vec{x}| > r_0\,. \end{cases}$$

Berechne die Streuphasen $\delta_0(k)$ und $\delta_1(k)$. Anleitung:

i) Die Streuphasen bestimmt man durch Lösen der Gleichung (4.9) im Skript. Für die harte Kugel reduziert sich diese Gleichung, in geeigneten Einheiten, auf

$$-u_l''(k,r) + \frac{l(l+1)}{r^2}u_l(k,r) = \epsilon u_l(k,r)\,, \quad \text{mit}\,\epsilon = k^2\,,\, l = 0,1,2\ldots, \tag{10}$$

siehe Gleichung (5.19), wobei wir nun aber $u_l(k,r_0) = 0$ fordern.

ii) Die Streuphasen sind definiert durch das aymptotische Verhalten der Lösungen der Gleichung (10)

$$u_l(k,r) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_l(k)}\sin(kr - l\pi/2 + \delta_l(k)) + O(r^{-1})\,.$$

iii) Für $l = 1$ ist die allgemeine Lösung von Gleichung (10) gegeben durch

$$u_1(k,r) = c_1\Big(\frac{\sin(kr)}{kr} - \cos(kr) + c_2\Big[\frac{\cos(kr)}{kr} + \sin(kr)\Big]\Big)\,,$$

wobei c_1, c_2 Konstanten sind für festes k. Zeige, dass $c_2 = \tan\delta_1(k)$. Bestimme daraus die Streuphase. Zeige, dass $\delta_1(k)$ im Limes $k \searrow 0$ klein gegenüber $\delta_0(k)$ ist.

3. Kombination von zwei Spins Betrachte zwei Systeme, beschrieben durch je einen zweidimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_2 = \mathbb{C}^2$ und zwei Spinoperatoren $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, welche auf den entsprechenden Hilbertraum wirken und durch $\vec{S}_i = \frac{\hbar}{2}\vec{\sigma}^{(i)}$ dargestellt sind. $\vec{\sigma}^{(i)}$ ist der Vektor der Paulimatrix, die auf $\mathcal{H}_i$ wirkt.
Wir wollen die Eigenzustände des Spinoperators $S = S_1 + S_2$ im Hilbertraum $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ konstruieren.

i) Benutze die Relation $\vec{S} = (\vec{S}_1 \otimes \mathbb{1}) + (\mathbb{1} \otimes \vec{S}_2)$. Schreibe die drei Komponenten von $\vec{S}$ als 4×4 Matrizen und prüfe die Relation $[S^i, S^j] = \mathrm{i}\hbar\epsilon^{ijk}S^k$. Berechne S^2.

ii) Zeige dass die Elemente der Basis $\mathcal{B}_1 = \{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ alle Eigenvektoren von S^z sind, nicht aber von S^2. Finde normierte Eigenvektoren von S^z und S^2.

iii) Sei $|L,l\rangle$ die Beschreibung eines Zustandes, so dass $S^2|L,l\rangle = \hbar^2 L(L+1)|L,l\rangle$ und $S^z|L,l\rangle = \hbar l|L,l\rangle$.
Zeige dass $\mathcal{B}_2 = \{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle, |0,0\rangle\}$ eine Basis des Hilbertraumes $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ bildet und gib eine explizite Definition der Elemente von $\mathcal{B}_2$ in Abhängigkeit der Basis $\mathcal{B}_1$.
Prüfe dass unter Paritätstransformation (Vertauschen der beiden Systeme) der Zustand $|L,l\rangle$ wie $P|L,l\rangle = (-1)^{L+1}|L,l\rangle$ transformiert.

iv) Sei $S^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(S^x \pm \mathrm{i}S^y)$. Wie transformieren die Zustände von $\mathcal{B}_2$ unter der Wirkung von $S^\pm$?