Das Unschärfespiel

Matthias Christandl

October 17, 2011

Heisenberg's Unschärferelation besagt

$$\Delta R \cdot \Delta S \geq \frac{1}{2} |\langle [R, S] \rangle|. \tag{1}$$

Wenn wir einen Spin in zwei verschiedenen Richtungen messen, also $R = \sigma_Z$ und $S = \sigma_X$ (Pauli Matrizen), dann können wir das Messresultat also nicht sowohl in X- als auch in Z- Richtung richtig vorhersagen. Das Resultat hat eine *Unschärfe*, die wir hier mit der Varianz quantifiziert haben. Wir wissen aus der statistischen Physik und auch der Informationstheorie, dass man Unschärfe auch mit Hilfe von Entropie quantifizieren kann, und so kann man auch zeigen dass

$$H(\sigma_Z) + H(\sigma_X) \geq 1, \tag{2}$$

wobei $H(\sigma_Z)$ die Shannon Entropie der Wahrscheinlichkeitsverteilung ist: Wenn wir $\uparrow$ mit Wahrscheinlichkeit p_Z messen, dann ist $H(\sigma_Z) = -p_Z \log_2 p_Z - (1 - p_Z) \log_2(1 - p_Z)$.

Dies kann man in folgendem *Unschärfespiel* illustrieren:

1. Bob präpariert ein Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen und gibt es Alice

2. Alice misst das Teilchen entweder in X oder Z Richtung und notiert das Resultat, welches wir α nennen. $\alpha \in \{\uparrow, \downarrow\}$

3. Anschliessend sagt sie Bob, welche Messung sie ausgeführt hat, aber nicht, welches Messresultat sie bekommen hat

4. Bob gewinnt nun das Spiel, wenn er korrekt errät, was α ist. (Äquivalent: er versucht seine Unsicherheit über α zu minimieren)

Da er ja vorher nicht weiss, ob Alice in X- oder Z- Richtung messen wird, ist seine Unsicherheit gegeben durch $H(\sigma_Z) + H(\sigma_X)$ welches ja mindestens 1 ist! Er kann also α nicht immer erraten und verliert daher das Spiel ab und zu!

Was passiert aber, wenn Bob einen Quantenspeicher zu Hause hat, in dem er einen weiteren Spin speichern kann? (Solche Quantenspeicher werden z.B. in der Gruppe von Professor Wallraff gebaut.) Dann kann er nämlich das Teilchen, welches er zu Alice schickt, mit dem Teilchen in seinem Quantenspeicher verschränken (siehe Figure 1). Wenn er das geschickt anstellt, z.B. in dem er ein

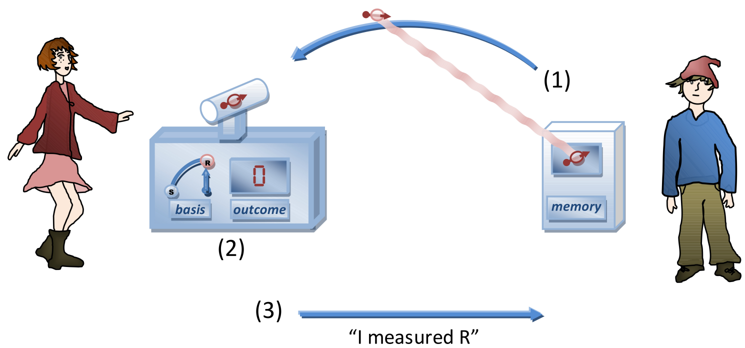

Figure 1: Das Unschärfespiel

Singlet präpariert

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\right)$$

und später die *gleiche* Messung auf seinem Teilchen im Quantenspeicher ausführt wie Alice dies auf ihrem Teilchen getan hat (dies kann er ja, da Alice ihm sagt, welche Messung sie ausführt), dann bekommt er immer genau das entgegengesetzte Resultat von Alice, da

$$U \otimes U \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle\right).$$

Er gewinnt das Spiel also immer! Um mit der heutigen Technik Fuss zu halten, brauchen wir also eine Unschärferelation, welche einen zusätzlichen Quantenspeicher mit in Betracht zieht. Solch eine haben wir kürzlich bewiesen:

$$H(\sigma_Z|B) + H(\sigma_X|B) \geq 1 + H(A|B).$$

wobei B das Teilchen im Quantenspeicher ist. $H(A|B)$ quantifiziert die Verschränkund zwischen Speicher und Alices Teilchen (im obigen Beispiel ist es -1, wenn die Teilchen nicht verschränkt sind ist der Wert positiv). $H(\sigma_Z|B)$ ist Bob's Unschärfe über Z relativ zu dem Quantenspeicher. Für mehr Informationen siehe Berta *et al.*, Nature Physics vol. 6, pages 659-662 (2010) `http://arxiv.org/abs/0909.0950`. Neben seiner fundamentalen Bedeutung für die Quantenphysik hat dieses Resultat auch Anwendungen in der Quantenkryptographie.