Übung 1. *Comptoneffekt.*

Betrachte die elastische Streuung eines Photons mit Energie $h\nu_1$ und Impuls $\vec{p}_1$ an einem Elektron in Ruhe, dessen Energie mc^2 beträgt. Es bezeichne $h\nu_2$ und $\vec{p}_2$ Energie und Impuls des gestreuten Photons. Das Elektron hat nach der Kollision Energie $c\sqrt{m^2c^2 + |\vec{p}_e|^2}$ mit Impuls $\vec{p}_e$. Zeige, dass

$$\frac{1}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_1} = \frac{h}{mc^2}\,(1 - \cos\theta)\ , \tag{1}$$

wobei θ den Streuwinkel angibt, d.h. den Winkel zwischen $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$.

Übung 2. *Plancks Strahlungsformel.*

Der Ziel dieser Aufgabe ist Plancks Änderung zur Strahlungsformel aus der Sicht der Thermodynamik zu verstehen.

Sei $S(E)$ die Entropie eines Oszillators (Resonators) der Energie E. Zeige:

(a) Im Wienschen Grenzfall, wo $E = C\omega \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$, gilt

$$\frac{d^2S}{dE^2} = -\frac{k}{\hbar\omega}\frac{1}{E}\ .$$

Hinweis. Verwende die thermodynamische Beziehung $TdS = dE$.

(b) Nach der klassischen Boltzmannverteilung gilt hingegen

$$\frac{d^2S}{dE^2} = -\frac{k}{E^2}\ .$$

(c) Plancks Abänderung von (a) oder, aus heutiger Sicht, Interpolation zwischen (a) und (b) war

$$\frac{d^2S}{dE^2} = -\frac{k}{E(E+\hbar\omega)}\ . \tag{2}$$

Zeige, dass dies auf

$$E(T) = \frac{\hbar\omega}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

führt und somit auf die Strahlungsformel

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar\omega}{\mathrm{e}^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}\ . \tag{3}$$

Übung 3. *Gausssches Wellenpaket in 1 Dimension.*

Die Lösung der freien Schrödingergleichung ist im Allgemeinen ein *Wellenpaket*, das sich im folgender Form schreiben lässt:

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k)\, \mathrm{e}^{i(kx - \omega(k)t)}\, dk\ , \tag{4}$$

wobei $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$.

Betrachte jetzt ein *Gausssches Wellenpaket*, d.h. $g(k)$ ist eine Gauss-Funktion,

$$g(k) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}a^2(k-k_0)^2} \ . \tag{5}$$

(a) Berechne für $t = 0$ den expliziten Ausdruck für $\psi(x, 0)$ und überzeuge dich, dass $|\psi(x, 0)|^2$ eine Gauss-Funktion mit Zentrum am $x = 0$ ist.

(b) Die *Standardabweichung* einer Gauss-Verteilung $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{1}{b^2}x^2}$ ist durch $\Delta x = b$ gegeben. Bestimme Δx aus $|\psi(x, 0)|^2$ und $\Delta p = \hbar \Delta k$ aus $|g(k)|^2$. Zeige, dass die Schranke der Heisenberg'schen Unschärferelation angenommen wird.

Bemerkung. Hier lautet die Heisenberg'sche Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p \geqslant \hbar/2$. Die Standardabweichungen Δx und Δp eines Gausssche Wellenpakets sind genau die Standardsabweichungen den Ortsraum- und Impulsobservablen, die in der Unschärferelation stehen.

(c) Es lässt sich zeigen, dass

$$|\psi(x, t)|^2 = \frac{2}{a^2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 a^4}}} \exp\left[-\frac{2a^2 \left(x - \frac{\hbar k_0}{m} t \right)^2}{a^4 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2}} \right] \ , \tag{6}$$

für beliebige t.
(Motivierte Studenten können diesen Schritt als zusätzliche fakultative Übung machen. Ansonst ist es möglich, die Übung weiter mit dem gegebenen Ausdruck zu lösen.)

Wie entwickelt sich die Wellenpacketsbreite Δx mit der Zeit? Bestimme die Zeitentwicklung von Δp (benutze $g(k, t) = g(k)\, \mathrm{e}^{-i\omega(k)t}$). Was stellst Du fest?

(d) Zeige, dass die Grösse

$$\int |\psi(x, t)|^2 \, dx$$

nicht von der Zeit abhängt (kurze Rechnung!). Was ist die physikalische Bedeutung?

Hinweise.

- *Um wenige Koeffiziente durch die Rechnung zu tragen, ist die durch* (4) *und* (5) *definierte Wellenfunktion nicht normiert.*
- *Die Integration über eine Gauss-Funktion lautet, für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$,*

$$\int \mathrm{e}^{-\alpha t^2 - \beta t} \, dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \, \mathrm{e}^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} \ , \tag{7}$$

wobei $\sqrt{\alpha}$ durch $\mathrm{Re}\,\sqrt{\alpha} > 0$ eindeutig festgelegt wird.

- *In der Fourieranalyse gilt die* Parseval-Plancherel Gleichung,

$$\int |f(x)|^2 \, dx = \int |\hat{f}(k)|^2 \, dk \ , \tag{8}$$

wobei $\hat{f}(k)$ die Fouriertransformation von $f(x)$ ist,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x)\, \mathrm{e}^{-ikx} \, dx \ . \tag{9}$$