Übung 1. *Comptoneffekt.*

Betrachte die elastische Streuung eines Photons mit Energie $h\nu_1$ und Impuls $\vec{p}_1$ an einem Elektron in Ruhe, dessen Energie mc^2 beträgt. Es bezeichne $h\nu_2$ und $\vec{p}_2$ Energie und Impuls des gestreuten Photons. Das Elektron hat nach der Kollision Energie $c\sqrt{m^2c^2 + |\vec{p}_e|^2}$ mit Impuls $\vec{p}_e$. Zeige, dass

$$\frac{1}{\nu_2} - \frac{1}{\nu_1} = \frac{h}{mc^2}\,(1 - \cos\theta)\ , \tag{1}$$

wobei θ den Streuwinkel angibt, d.h. den Winkel zwischen $\vec{p}_1$ und $\vec{p}_2$.

Lösung. Für elastische Streuung gilt Energie und Impulserhaltung, also

$$\begin{aligned} h\nu_1 - h\nu_2 + mc^2 &= \sqrt{m^2c^4 + c^2|\vec{p}_e|^2} \\ \vec{p}_1 - \vec{p}_2 &= \vec{p}_e \end{aligned}$$

Beachte, dass $E_1 = h\nu_1 = c|\vec{p}_1|$ und $E_2 = h\nu_2 = c|\vec{p}_2|$ gilt für die masselosen Photonen. Somit können die beiden Gleichungen quadriert und umgeschrieben werden. Man erhält

$$\begin{aligned} \nu_1^2 + \nu_2^2 + \left(\frac{mc^2}{h}\right)^2 + 2\,\frac{mc^2}{h}\,(\nu_1 - \nu_2) - 2\nu_1\nu_2 &= \left(\frac{mc^2}{h}\right)^2 + \frac{c^2}{h^2}\,|\vec{p}_e|^2 \\ \nu_1^2 + \nu_2^2 - 2\nu_1\nu_2\cos\theta &= \frac{c^2}{h^2}\,|\vec{p}_e|^2 \end{aligned}$$

Subtraktion der beiden Gleichungen voneinander ergibt nun

$$2\,\frac{mc^2}{h}\,(\nu_1 - \nu_2) - 2\nu_1\nu_2\,(1 - \cos\theta) = 0\ ,$$

und die gesuchte Gleichung folgt sofort.

Übung 2. *Plancks Strahlungsformel.*

Der Ziel dieser Aufgabe ist Plancks Änderung zur Strahlungsformel aus der Sicht der Thermodynamik zu verstehen.

Sei $S(E)$ die Entropie eines Oszillators (Resonators) der Energie E. Zeige:

(a) Im Wienschen Grenzfall, wo $E = C\omega \mathrm{e}^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$, gilt

$$\frac{d^2S}{dE^2} = -\frac{k}{\hbar\omega}\frac{1}{E}\ .$$

Hinweis. Verwende die thermodynamische Beziehung $TdS = dE$.

(b) Nach der klassischen Boltzmannverteilung gilt hingegen

$$\frac{d^2S}{dE^2} = -\frac{k}{E^2}\ .$$

(c) Plancks Abänderung von (a) oder, aus heutiger Sicht, Interpolation zwischen (a) und (b) war

$$\frac{d^2S}{dE^2} = -\frac{k}{E(E+\hbar\omega)} \ . \tag{2}$$

Zeige, dass dies auf

$$E(T) = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1}$$

führt und somit auf die Strahlungsformel

$$u(\omega, T) = \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \ . \tag{3}$$

Lösung.

(a) Auflösung von $E = C\omega e^{-\frac{\hbar\omega}{kT}}$ nach T liefert

$$\frac{dS}{dE} = \frac{1}{T} = -\frac{k}{\hbar\omega}\log(\frac{E}{C\omega}) \ ,$$

und somit

$$\frac{d^2S}{dE^2} = -\frac{k}{\hbar\omega}\frac{1}{E} \ .$$

(b) Aus der klassischen Boltzmannverteilung folgt über $E = kT$, gleichermassen

$$\frac{dS}{dE} = \frac{k}{E} \ , \qquad \frac{d^2S}{dE^2} = -\frac{k}{E^2} \ .$$

(c) Aus

$$\frac{d^2S}{dE^2} = -\frac{k}{E(E+\hbar\omega)}$$

folgt nun rückwärts

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE} = \frac{k}{\hbar\omega}\log(\frac{E+\hbar\omega}{E}) + C_0 = \frac{k}{\hbar\omega}\log(1 + \frac{\hbar\omega}{E}) + C_0 \tag{4}$$

wobei C_0 eine Konstante in E ist. Diese verschwindet durch Vergleich mit (b) im Limes $E \gg \hbar\omega$, mit $\log(1+x) \approx x$ für kleine x.
Auflösung nach E liefert

$$E(\omega, T) = \frac{\hbar\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{kT}} - 1} \ .$$

Dann kann die Energiedichte $u(\omega, T)$ des elektromagnetisches Feld gerechnet werden,

$$\begin{aligned} u(\omega, T) &= (\text{Dichte der Moden}) \times (\text{Energie der Mode } \omega) \\ &= \frac{\omega^2}{\pi^2 c^3} \cdot E(\omega, T) \ , \end{aligned}$$

wobei in der letzte Gleichung (1.1.5) vom Skript benutzt wird. Die Plancksche Strahlungsformel folgt direkt.

Übung 3. *Gausssches Wellenpaket in 1 Dimension.*

Die Lösung der freien Schrödingergleichung ist im Allgemeinen ein *Wellenpaket*, das sich im folgender Form schreiben lässt:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k)\, e^{i(kx - \omega(k)t)}\, dk \ , \tag{5}$$

wobei $\omega(k) = \frac{\hbar k^2}{2m}$.

Betrachte jetzt ein *Gausssches Wellenpaket*, d.h. $g(k)$ ist eine Gauss-Funktion,

$$g(k) = e^{-\frac{1}{4}a^2(k-k_0)^2} \ . \tag{6}$$

(a) Berechne für $t = 0$ den expliziten Ausdruck für $\psi(x,0)$ und überzeuge dich, dass $|\psi(x,0)|^2$ eine Gauss-Funktion mit Zentrum am $x = 0$ ist.

(b) Die *Standardabweichung* einer Gauss-Verteilung $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{1}{b^2}x^2}$ ist durch $\Delta x = b$ gegeben. Bestimme Δx aus $|\psi(x,0)|^2$ und $\Delta p = \hbar\Delta k$ aus $|g(k)|^2$. Zeige, dass die Schranke der Heisenberg'schen Unschärferelation angenommen wird.

Bemerkung. Hier lautet die Heisenberg'sche Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p \geqslant \hbar/2$. Die Standardabweichungen Δx und Δp eines Gausssche Wellenpakets sind genau die Standardsabweichungen den Ortsraum- und Impulsobservablen, die in der Unschärferelation stehen.

(c) Es lässt sich zeigen, dass

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{2}{a^2}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\hbar^2t^2}{m^2a^4}}}\exp\left[-\frac{2a^2\left(x-\frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2}{a^4+\frac{4\hbar^2t^2}{m^2}}\right] , \tag{7}$$

für beliebige t.
(Motivierte Studenten können diesen Schritt als zusätzliche fakultative Übung machen. Ansonst ist es möglich, die Übung weiter mit dem gegebenen Ausdruck zu lösen.)

Wie entwickelt sich die Wellenpacketsbreite Δx mit der Zeit? Bestimme die Zeitentwicklung von Δp (benutze $g(k,t) = g(k)\,\mathrm{e}^{-i\omega(k)t}$). Was stellst Du fest?

(d) Zeige, dass die Grösse

$$\int |\psi(x,t)|^2\,dx$$

nicht von der Zeit abhängt (kurze Rechnung!). Was ist die physikalische Bedeutung?

Hinweise.

- *Um wenige Koeffiziente durch die Rechnung zu tragen, ist die durch* (5) *und* (6) *definierte Wellenfunktion nicht normiert.*
- *Die Integration über eine Gauss-Funktion lautet, für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,* $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$,

$$\int \mathrm{e}^{-\alpha t^2-\beta t}\,dt = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,\mathrm{e}^{\frac{\beta^2}{4\alpha}} , \tag{8}$$

wobei $\sqrt{\alpha}$ durch $\mathrm{Re}\,\sqrt{\alpha} > 0$ *eindeutig festgelegt wird.*

- *In der Fourieranalyse gilt die* Parseval-Plancherel Gleichung,

$$\int |f(x)|^2\,dx = \int |\hat{f}(k)|^2\,dk , \tag{9}$$

wobei $\hat{f}(k)$ die Fouriertransformation von $f(x)$ ist,

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int f(x)\,\mathrm{e}^{-ikx}\,dx . \tag{10}$$

Lösung.

(a) Rechne

$$\begin{aligned}
\psi(x,0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}a^2(k-k_0)^2} \mathrm{e}^{+ikx}\, dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp\left[-\frac{1}{4}a^2\,(k-k_0)^2 + ikx\right] dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp\left[-\frac{1}{4}a^2k^2 + \frac{1}{2}a^2kk_0 - \frac{1}{4}a^2k_0^2 + ikx\right] dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp\left[-\frac{1}{4}a^2k^2 + k\left(\frac{1}{2}a^2k_0 + ix\right) - \frac{1}{4}a^2k_0^2\right] dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\frac{1}{4}a^2k_0^2\right)\ \sqrt{\frac{\pi}{a^2/4}}\ \exp\left(\frac{\left(\frac{1}{2}a^2k_0 + ix\right)^2}{a^2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{a}\ \exp\left(-\frac{x^2}{a^2} + ik_0x\right)\ ,
\end{aligned}$$

wobei wir die Integrationsformel über eine Gauss-Funktion benuzt haben (siehe Hinweise). Dann

$$|\psi(x,0)|^2 = \frac{2}{a^2}\ \exp\left(-\frac{2}{a^2}\,x^2\right)\ . \tag{11}$$

(b) In (11) kann man den Koeffizient von x^2 mit der Definition der Standardabweichung vergleichen,

$$\frac{2}{a^2} = \frac{1}{2\,(\Delta x)^2}\ ,$$

was auf $\Delta x = a/2$ führt. Es gilt

$$|g(k)|^2 = \exp\left(-\frac{a^2}{2}\,(k-k_0)^2\right)\ ,$$

so dass

$$\frac{1}{2\,\Delta k^{\,2}} = \frac{a^2}{2}\ ,$$

und somit

$$\Delta k = \frac{1}{a} \qquad ; \qquad \Delta p = \hbar\Delta k = \frac{\hbar}{a}\ .$$

Wir haben $\Delta x \cdot \Delta p = \hbar/2$, was der Schranke der Unschärferelation $\Delta x \cdot \Delta p \geqslant \hbar/2$ entspricht.

(c) Los geht's:

$$\begin{aligned}
\psi(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathrm{e}^{-\frac{a^2}{4}(k-k_0)^2} \mathrm{e}^{i(kx-\omega(k)t)}\, dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp\left[-\frac{a^2}{4}k^2 + \frac{a^2}{2}\,kk_0 - \frac{a^2}{4}k_0^2 + ikx - \frac{i\hbar k^2}{2m}\,t\right] dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \exp\left[-k^2\left(\frac{a^2}{4} + \frac{i\hbar t}{2m}\right) + k\left(\frac{a^2}{2}\,k_0 + ix\right) - \frac{a^2}{4}\,k_0^2\right] dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \exp\left(-\frac{a^2}{4}\,k_0^2\right)\ \sqrt{\frac{\pi}{\frac{a^2}{4} + \frac{i\hbar t}{2m}}}\ \exp\left(\frac{\left(\frac{a^2}{2}k_0 + ix\right)^2}{a^2 + \frac{2i\hbar t}{m}}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\ \exp\left(-\frac{a^2}{4}\,k_0^2\right)\sqrt{\left[\frac{a^2}{4} + \frac{i\hbar t}{2m}\right]^{-1}}\ \exp\left[\frac{\left(\frac{a^4}{4}\,k_0^2 + i\,a^2k_0x - x^2\right)\left(a^2 - \frac{2i\hbar t}{m}\right)}{a^4 + \frac{4\hbar^2t^2}{m^2}}\right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\ \exp\left(-\frac{a^2}{4}\,k_0^2\right)\sqrt{\left[\frac{a^2}{4} + \frac{i\hbar t}{2m}\right]^{-1}}\ \exp\left[\frac{\frac{a^6}{4}\,k_0^2 + 2a^2\,\frac{\hbar k_0 tx}{m} - a^2x^2}{a^4 + \frac{4\hbar^2t^2}{m^2}} + i(...)\right]\ .
\end{aligned}$$

Der Term im Exponent ist

$$\begin{aligned}
\frac{a^6}{4}\,k_0^2 + 2a^2\,\frac{\hbar k_0 tx}{m} - a^2x^2 &= -a^2\left(x - \frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2 + a^2\,\frac{\hbar^2k_0^2t^2}{m^2} + \frac{a^6}{4}\,k_0^2 \\
&= -a^2\left(x - \frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2 + \frac{a^2}{4}k_0^2\left(\frac{4\hbar^2t^2}{m^2} + a^4\right)\ .
\end{aligned}$$

Dies führt auf

$$
\begin{aligned}
|\psi(x,t)|^2 &= \frac{1}{2}\,\exp\left(-\frac{a^2}{2}\,k_0^2\right)\frac{1}{\left|\frac{a^2}{4}+\frac{i\hbar t}{2m}\right|}\,\exp\left[2\cdot\frac{\frac{a^6}{4}\,k_0^2+2a^2\,\frac{\hbar k_0 t x}{m}-a^2x^2}{a^4+\frac{4\hbar^2t^2}{m^2}}\right] \\
&= \frac{1}{2}\,\exp\left(-\frac{a^2}{2}\,k_0^2\right)\frac{1}{\sqrt{\frac{a^4}{16}+\frac{\hbar^2t^2}{4m^2}}}\,\exp\left[-\frac{2a^2\left(x-\frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2}{a^4+\frac{4\hbar^2t^2}{m^2}}+\frac{a^2}{2}\,k_0^2\right] \\
&= \frac{2}{a^2}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{4\hbar^2t^2}{m^2a^4}}}\,\exp\left[-\frac{2a^2\left(x-\frac{\hbar k_0}{m}t\right)^2}{a^4+\frac{4\hbar^2t^2}{m^2}}\right]\;.
\end{aligned}
$$

Jetzt können wir $\Delta x(t)$ rechnen. Aus dem Vergleich

$$\frac{1}{2\,\Delta x(t)^{\,2}}=\frac{2\,a^2}{a^4+\frac{4\hbar^2t^2}{m^2}}$$

folgt

$$\Delta x(t)=\frac{a}{2}\sqrt{1+\frac{4\hbar^2t^2}{a^4m^2}}\;.$$

Beachte, dass $\Delta x(t)$ zunimmt in der Zeit.
Weiter gilt

$$|g(k,t)|^2=|g(k)\,\mathrm{e}^{-i\omega(k)t}|^2=|g(k)|^2\;,$$

so ist $\Delta p(t)=\Delta p(t=0)=\hbar/a$ unabhängig von der Zeit.

Der Wellenpaket verbreitert sich, und es folgt $\Delta x(t)\cdot\Delta p>\hbar/2$ für $t>0$.

(d) Wir merken, dass $g(k,t)$ die Fouriertransformation (bzgl. Variable x) von $\psi(x,t)$ ist. Dann gilt die Parseval-Plancherel Formel (siehe Hinweis), und

$$\int|\psi(x,t)|^2\,dx=\int|g(k,t)|^2\,dk=\int|g(k)\,\mathrm{e}^{-i\omega(k)t}|^2\,dk=\int|g(k)|^2\,dk\;. \tag{12}$$

Die Grösse $|\psi(x,t)|^2$ ist als eine Warscheinlichkeitsverteilung über x zu interpretieren. Die Zeitunabhängigkeit von (12) sagt uns, dass die gesamte Warscheinlichkeit erhalten ist. In der Tat normiert man oft die Funktion $\psi(x,t)$ so, dass $\int|\psi(x,t)|^2\,dx=1$.

Die Parseval-Plancherel Gleichung sagt uns auch, dass die Gesamtwarscheinlichkeit entweder im Ortsraum oder im Impulsraum gleich gerechnet werden kann.