Übung 1. *Kommutierende Observablen.*

Zeige, dass im endlich-dimensionalen Fall zwei Observablen genau dann kommutieren, wenn sie gleichzeitig diagonalisierbar sind.

Hinweise. Die mathematische Aussage lautet: Für zwei selbstadjungierte Operatoren A, B gilt $[A, B] = 0$ genau dann, wenn eine Basis $\{|\phi_n\rangle\}$ existiert so dass alle $|\phi_n\rangle$ gleichzeitig Eigenvektoren von A und B sind.

Nehme zuerst an, dass $[A, B] = 0$.

(a) Zeige: Wenn $|\psi\rangle$ ein Eigenvektor von der Observable A ist, dann ist $B|\psi\rangle$ auch ein Eigenvektor von A mit gleichem Eigenwert.

(b) Sei $\{|a_n^i\rangle\}$ eine Basis von Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\{a_n\}$ (der Index i entspricht Entartungen, d.h. wenn es mehrere Eigenvektoren zu einem gleichen Eigenwert gibt).

Stelle fest, dass B in dieser Basis Blockdiagonalform hat, wobei jeder Block auf einem Eigenraum von A wirkt.

(c) Bilde eine explizite Basis, deren Elemente gleichzeitig Eigenvektoren von A und B sind.

Für die Gegenrichtung, betrachte die Wirkung des Kommutators $[A, B]$ auf eine bestimmte Basis.

Übung 2. *Zwei-Level System.*

Diese Übung ist eine praktische Anwendung euch bereits bekannter Elemente der Quantenmechanik und eine Vorbereitung zu Zwei-Level-Spin-Systemen, die in den nächsten Kapiteln in der Vorlesung vorkommen werden.

Betrachte ein Quantensystem, das sich durch einen zweidimensionalen Hilbertraum $\mathscr{H}$ und einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator H_0 beschreiben lässt. In der Basis der Energie-Eigenzustände $|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$ nimmt H_0 die Gestalt $H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$ an.

Betrachte jetzt eine Störung auf dem System, d.h. wir ersetzen H_0 durch einen anderen Hamiltonoperator

$$H = H_0 + W \ , \tag{1}$$

wobei $W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12}^* & w_{22} \end{pmatrix}$, $W = W^\dagger$.

Dieses Modell eignet sich zum Beispiel zur Beschreibung eines grösseren, gestörten Quantensystems, in dem zwei Energieeigenwerte nahe beieinander liegen und weit von den anderen Energienwerten.

(a) Berechne die Eigenwerte $E_\pm$ des neuen Hamiltonoperators H und argumentiere, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit $w_{11} = w_{22} = 0$ angenommen werden kann.

(b) Führe die Parameter $E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$ und $\Delta = \frac{1}{2}(E_1 - E_2)$ ein und skizziere für ein bestimmtes E_m wie die Grössen E_1, E_2 und $E_\pm$ von Δ abhängen.

Für $\Delta = 0$ ist das ungestörte System entartet. Welchen Effekt hat die Störung?

(c) Die Zustände $|\phi_{1,2}\rangle$ sind keine Energie-Eigenzustände von H. Zeige, dass für die neuen Eigenzustände $|\psi_\pm\rangle$ gilt:

$$|\psi_+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\phi}{2}}\,|\phi_1\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\phi}{2}}\,|\phi_2\rangle\ ; \tag{2}$$

$$|\psi_-\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\phi}{2}}\,|\phi_1\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\phi}{2}}\,|\phi_2\rangle\ , \tag{3}$$

mit $\tan\theta = \frac{|w_{12}|}{\Delta}$ und $w_{12} = |w_{12}|\,\mathrm{e}^{-i\phi}$.

Was passiert im Fall von starker Kopplung ($|\Delta| \ll |w_{12}|$)? Was im Fall von schwacher Kopplung ($|\Delta| \gg |w_{12}|$)?

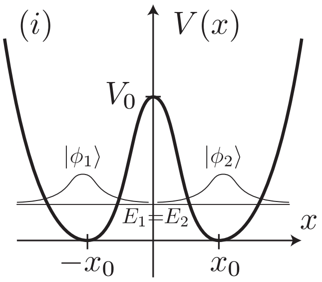
Hinweis. Schreibe zuerst $H = (...)\cdot\mathbb{1} + (...)\cdot K$ *mit* $K = \begin{pmatrix} 1 & (...) \\ (...) & -1 \end{pmatrix}$ *und diagonalisiere* K*. Benutze dann die Beziehungen* $\tan\theta\cdot\cos\theta\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]^{-1} = \cos\frac{\theta}{2}$ *und* $\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)\cdot\cos\theta\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]^{-1} = \sin\frac{\theta}{2}$.

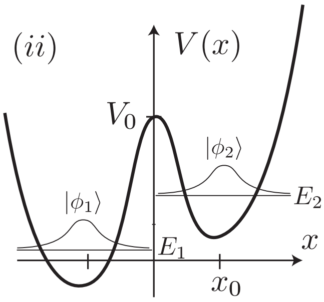
(d) Man präpariert das System im Zustand $|\psi(t=0)\rangle = |\phi_1\rangle$. Wie entwickelt sich der Zustand $|\psi(t)\rangle$ in der Basis $|\psi_\pm\rangle$ mit der Zeit unter dem gestörten Hamiltonian? Berechne die Wahrscheinlichkeit $\mathscr{P}_{12}(t)$, das System nach einer Zeit t im Zustand $|\phi_2\rangle$ zu finden. Zeige die Rabi'sche Oszillationsformel,

$$\mathscr{P}_{12}(t) = \frac{4|w_{12}|^2}{4|w_{12}|^2 + (E_1 - E_2)^2}\,\sin^2\left[\sqrt{4|w_{12}|^2 + (E_1 - E_2)^2}\,\frac{t}{2\hbar}\right]\ . \tag{4}$$

Betrachte jetzt ein Elektron in einem Potential $V(x)$, das unten gezeichnete Form hat (dieses Potential könnte z.B. ein Modell für ein "Double Quantum Dot" sein).

Betrachte zuerst den Fall dass V_0 viel grösser ist als die Grundzustandsenergien der beiden "Töpfe". Im Fall (i) hat das System zwei entartete und entkoppelte Grundzustände $|\phi_1\rangle$ und $|\phi_2\rangle$, bei $-x_0$ und x_0. Im Fall (ii) schalten wir ein elektrisches Feld ein, das das Potential auf einer Seite senkt und auf der anderen Seite hebt.





(e) Schätze für den Fall (i) die Grundzustandsenergie in einem "Topf" mit einer Approximation des Potentials bis hin zu zweiter Ordnung ab (ausgedrückt als Funktion von $a = V''(x_0)$).

Hinweis. The Return of the Harmonic Oscillator.

(f) Jetzt möchten wir den Effekt von einem endlicher V_0 betrachten (den wir bis jetzt venachlässigt haben). Die Störung sieht (bis zur 1. Ordnung) wie in (1) aus.

Nun präpariert man das System mit einem elektrischen Feld so dass $E_1 < E_2$, $|\Delta| \gg |w_{12}|$ und der Zustand durch $|\phi_1\rangle \approx |\psi_-\rangle$ gegeben ist. Dann wird das Elektrische Feld langsam (d.h. adiabatisch) verändert bis $E_1 > E_2$. In welchem Zustand befindet sich das System am Ende des Prozesses? Beschreibe den Vorgang.

Hinweis. Bei einem (inifitesimalen) adiabatischen Prozess auf einem System im Energie-Eigenzustand $|\phi\rangle$ *wird der Zustand des Systems immer zu dem neuen Energie-Eigenzustand verändert, dessen Energie (fast) gleich ist. Betrachte entsprechend deine Skizze vom Teil (b).*

Übung 3. ***Kugelfunktionendarstellung von so(3).***

(a) Überzeuge dich mit geometrischen Überlegungen, dass Drehungen um die x-, y- und z-Achse in 3 Dimensionen, sich in Kugelkoordinaten wie folgt schreiben lassen (für kleine Winkel χ):

$$\begin{aligned} R_x(\chi) &: (\theta, \phi) \to (\theta - \chi \cdot \sin\phi,\ \phi - \chi \cdot \cot\theta \cos\phi) \ ; \\ R_y(\chi) &: (\theta, \phi) \to (\theta + \chi \cdot \cos\phi,\ \phi - \chi \cdot \cot\theta \sin\phi) \ ; \\ R_z(\chi) &: (\theta, \phi) \to (\theta,\ \phi + \chi) \ . \end{aligned} \tag{5}$$

(b) Wir betrachten jetzt die durch (7.1.5) gegebene Wirkung von $SO(3)$ auf die Funktionen auf der Kugel,

$$(U(R)\,\psi)(\vec{x}) = \psi(R^{-1}\,\vec{x}) \ . \tag{6}$$

Berechne explizite Ausdrücke für die Generatoren der obigen Drehungen

$$M_j = i\,\frac{d}{d\chi}\,U(R_j(\chi))\bigg|_{\chi=0} \ , \tag{7}$$

und zeige, dass

$$M_3 = -i\frac{\partial}{\partial\phi} \quad ; \quad M_\pm = \mathrm{e}^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \ , \tag{8}$$

gilt (wobei $M_\pm = M_1 \pm iM_2$).