Übung 1. *Kommutierende Observablen.*

Zeige, dass im endlich-dimensionalen Fall zwei Observablen genau dann kommutieren, wenn sie gleichzeitig diagonalisierbar sind.

Hinweise. Die mathematische Aussage lautet: Für zwei selbstadjungierte Operatoren A, B gilt $[A, B] = 0$ genau dann, wenn eine Basis $\{|\phi_n\rangle\}$ existiert so dass alle $|\phi_n\rangle$ gleichzeitig Eigenvektoren von A und B sind.

Nehme zuerst an, dass $[A, B] = 0$.

(a) Zeige: Wenn $|\psi\rangle$ ein Eigenvektor von der Observable A ist, dann ist $B|\psi\rangle$ auch ein Eigenvektor von A mit gleichem Eigenwert.

(b) Sei $\{|a_n^i\rangle\}$ eine Basis von Eigenvektoren von A zu den Eigenwerten $\{a_n\}$ (der Index i entspricht Entartungen, d.h. wenn es mehrere Eigenvektoren zu einem gleichen Eigenwert gibt).

Stelle fest, dass B in dieser Basis Blockdiagonalform hat, wobei jeder Block auf einem Eigenraum von A wirkt.

(c) Bilde eine explizite Basis, deren Elemente gleichzeitig Eigenvektoren von A und B sind.

Für die Gegenrichtung, betrachte die Wirkung des Kommutators $[A, B]$ auf eine bestimmte Basis.

Lösung. Wir nehmen zuerst an, dass $[A, B] = 0$ gilt, und zeigen die verschiedenen Punkte in den Hinweise.

(a) Nehme an, dass $A|\psi\rangle = a|\psi\rangle$. Dann gilt

$$0 = [A, B]|\psi\rangle = AB|\psi\rangle - BA|\psi\rangle = A\,B|\psi\rangle - a\,B|\psi\rangle\ ,$$

d.h. $A\,B|\psi\rangle = a\,B|\psi\rangle$ und $B|\psi\rangle$ ist Eigenvektor von A mit gleichem Eigenwert a.

(b) Punkt (a) sagt uns, dass B die Eigenräume von A invariant lässt (denn ein Vektor in einem Eigenraum ist selbst Eigenvektor!). Dann muss B in der Basis $\{|a_k^i\rangle\}$ eine Blockdiagonalform übernehmen (der Basis wird so geordnet, dass Eigenvektoren zu gleichen Eigenwerten nebeneinander sind),

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & B_2 & 0 & \\ 0 & 0 & B_3 & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix}$$

wobei jeder Block B_n auf der Eigenraum $\mathscr{A}_n$ von A zum Eigenwert a_n wirkt.

(c) Die Blocks B_n sind im allgemein nicht diagonal. Aber jeder Block B_n kann innerhalb der Eigenraum $\mathscr{A}_n$ diagonalisiert werden durch geeignete Wahl einer Basis $\left\{|c_n^i\rangle\right\}_i$. Beachte, dass jeder Vektor $|c_n^i\rangle$ zu einem Eigenraum von A gehört und ist damit selber Eigenvektor von A. So sind $\{|c_n^i\rangle\}$ eine Eigenbasis von A, und per Konstruktion auch eine Eigenbasis von B.

Wir zeigen jetzt die Gegenrichtung. Sei $\{|\psi_j\rangle\}$ eine gemeinsame Eigenbasis zu A und B. Jede Wirkung des Kommutators auf einem gemeinsamen Eigenvektor zu A und B verschwindet, da mit $A|\psi_j\rangle = a_j|\psi_j\rangle$ und $B|\psi_j\rangle = b_j|\psi_j\rangle$ gilt

$$[A, B]|\psi_j\rangle = AB|\psi_j\rangle - BA|\psi_j\rangle = a_j b_j|\psi_j\rangle - a_j b_j|\psi_j\rangle = 0\ .$$

Alle kets $|\psi\rangle$ lassen sich in der Basis $\{|\psi_j\rangle\}$ zerlegen; so gilt für alle $|\psi\rangle$

$$[A, B]|\psi\rangle = 0$$

und damit $[A, B] = 0$.

Übung 2. ***Zwei-Level System.***

Diese Übung ist eine praktische Anwendung euch bereits bekannter Elemente der Quantenmechanik und eine Vorbereitung zu Zwei-Level-Spin-Systemen, die in den nächsten Kapiteln in der Vorlesung vorkommen werden.

Betrachte ein Quantensystem, das sich durch einen zweidimensionalen Hilbertraum $\mathscr{H}$ und einen zeitunabhängigen Hamiltonoperator H_0 beschreiben lässt. In der Basis der Energie-Eigenzustände $|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$ nimmt H_0 die Gestalt $H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}$ an.

Betrachte jetzt eine Störung auf dem System, d.h. wir ersetzen H_0 durch einen anderen Hamiltonoperator

$$H = H_0 + W \ , \tag{1}$$

wobei $W = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{12}^* & w_{22} \end{pmatrix}$, $W = W^\dagger$.

Dieses Modell eignet sich zum Beispiel zur Beschreibung eines grösseren, gestörten Quantensystems, in dem zwei Energieeigenwerte nahe beieinander liegen und weit von den anderen Energienwerten.

(a) Berechne die Eigenwerte $E_\pm$ des neuen Hamiltonoperators H und argumentiere, dass ohne Beschränkung der Allgemeinheit $w_{11} = w_{22} = 0$ angenommen werden kann.

(b) Führe die Parameter $E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$ und $\Delta = \frac{1}{2}(E_1 - E_2)$ ein und skizziere für ein bestimmtes E_m wie die Grössen E_1, E_2 und $E_\pm$ von Δ abhängen.

Für $\Delta = 0$ ist das ungestörte System entartet. Welchen Effekt hat die Störung?

(c) Die Zustände $|\phi_{1,2}\rangle$ sind keine Energie-Eigenzustände von H. Zeige, dass für die neuen Eigenzustände $|\psi_\pm\rangle$ gilt:

$$|\psi_+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\phi}{2}}\,|\phi_1\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\phi}{2}}\,|\phi_2\rangle \ ; \tag{2}$$

$$|\psi_-\rangle = -\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\phi}{2}}\,|\phi_1\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\phi}{2}}\,|\phi_2\rangle \ , \tag{3}$$

mit $\tan\theta = \frac{|w_{12}|}{\Delta}$ $(0 \leqslant \theta < \pi)$ und $w_{12} = |w_{12}|\,\mathrm{e}^{-i\phi}$.

Was passiert im Fall von starker Kopplung ($|\Delta| \ll |w_{12}|$)? Was im Fall von schwacher Kopplung ($|\Delta| \gg |w_{12}|$)?

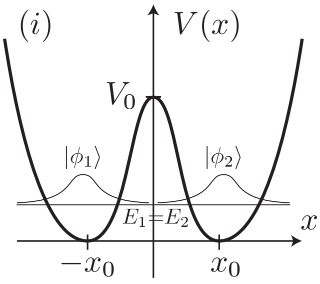
Hinweis. Schreibe zuerst $H = (\ldots)\cdot\mathbb{1} + (\ldots)\cdot K$ *mit* $K = \begin{pmatrix} 1 & (\ldots) \\ (\ldots) & -1 \end{pmatrix}$ *und diagonalisiere* K*. Benutze dann die Beziehungen* $\tan\theta\cdot\cos\theta\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]^{-1} = \cos\frac{\theta}{2}$ *und* $\left(\frac{1}{\cos\theta} - 1\right)\cdot\cos\theta\left[2\sin\frac{\theta}{2}\right]^{-1} = \sin\frac{\theta}{2}$.

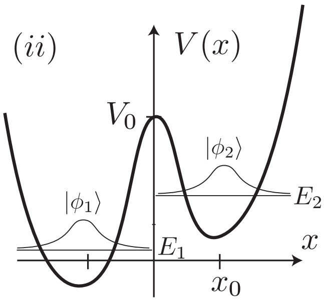
(d) Man präpariert das System im Zustand $|\psi(t=0)\rangle = |\phi_1\rangle$. Wie entwicklt sich der Zustand $|\psi(t)\rangle$ in der Basis $|\psi_\pm\rangle$ mit der Zeit unter dem gestörten Hamiltonian? Berechne die Wahrscheinlichkeit $\mathscr{P}_{12}(t)$, das System nach einer Zeit t im Zustand $|\phi_2\rangle$ zu finden. Zeige die Rabi'sche Oszillationsformel,

$$\mathscr{P}_{12}(t) = \frac{4|w_{12}|^2}{4|w_{12}|^2 + (E_1 - E_2)^2}\,\sin^2\left[\sqrt{4|w_{12}|^2 + (E_1 - E_2)^2}\,\frac{t}{2\hbar}\right] \ . \tag{4}$$

Betrachte jetzt ein Elektron in einem Potential $V(x)$, das unten gezeichnete Form hat (dieses Potential könnte z.B. ein Modell für ein "Double Quantum Dot" sein).

Betrachte zuerst den Fall dass V_0 viel grösser ist als die Grundzustandsenergien der beiden "Töpfe". Im Fall (i) hat das System zwei entartete und entkoppelte Grundzustände $|\phi_1\rangle$ und $|\phi_2\rangle$, bei $-x_0$ und x_0. Im Fall (ii) schalten wir ein elektrisches Feld ein, das das Potential auf einer Seite senkt und auf der anderen Seite hebt.





(e) Schätze für den Fall (i) die Grundzustandsenergie in einem "Topf" mit einer Approximation des Potentials bis hin zu zweiter Ordnung ab (ausgedrückt als Funktion von $a = V''(x_0)$).

Hinweis. The Return of the Harmonic Oscillator.

(f) Jetzt möchten wir den Effekt von einem endlicher V_0 betrachten (den wir bis jetzt venachlässigt haben). Die Störung sieht (bis zur 1. Ordnung) wie in (1) aus.

Nun präpariert man das System mit einem elektrischen Feld so dass $E_1 < E_2$, $|\Delta| \gg |w_{12}|$ und der Zustand durch $|\phi_1\rangle \approx |\psi_-\rangle$ gegeben ist. Dann wird das Elektrische Feld langsam (d.h. adiabatisch) verändert bis $E_1 > E_2$. In welchem Zustand befindet sich das System am Ende des Prozesses? Beschreibe den Vorgang.

Hinweis. Bei einem (inifitesimalen) adiabatischen Prozess auf einem System im Energie-Eigenzustand $|\phi\rangle$ wird der Zustand des Systems immer zu dem neuen Energie-Eigenzustand verändert, dessen Energie (fast) gleich ist. Betrachte entsprechend deine Skizze vom Teil (b).

Lösung.

(a) Wenn $w_{11} \neq 0$ oder $w_{22} \neq 0$ darf man H_0 ohne Änderung der Grundzustände neu definieren als $H_0 = \left(\begin{smallmatrix} E_1+w_{11} & 0 \\ 0 & E_2+w_{22} \end{smallmatrix}\right)$, und dann wird $W = \left(\begin{smallmatrix} 0 & w_{12} \\ w_{12}^* & 0 \end{smallmatrix}\right)$ mit verschwindender Diagonale—man kann also w_{11} und w_{22} in E_1 und E_2 absorbieren.

Diagonalisierung der neue Hamiltonian H durch elementare linear Algebra gibt

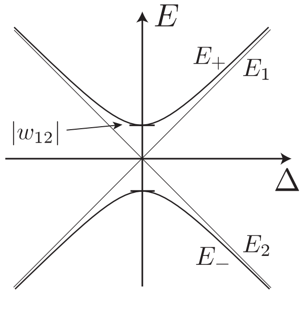
$$E_\pm = \frac{1}{2}(E_1 + E_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(E_1 - E_2)^2 + 4|w_{12}|^2}\ .$$

(Löse z.B. die Gleichungen $\det H = E_+E_-$ und $\operatorname{tr} H = E_+ + E_-$.)

(b) Mit $E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}(E_1 + E_2)$ und $\Delta = \frac{1}{2}(E_1 - E_2)$ bekommt man

$$E_\pm = E_\mathrm{m} \pm \sqrt{\Delta^2 + |w_{12}|^2}\ .$$

Weiter gilt $E_1 = E_\mathrm{m} + \Delta$ und $E_2 = E_\mathrm{m} - \Delta$, so dass die Grafik von $E_1, E_2, E_\pm$ als Funktion von Δ wie folgendes aussieht. (Hier haben wir $E_\mathrm{m} = 0$ angenommen; wenn dies nicht der Fall ist muss die Grafik entsprechend Vertikal verschoben werden.)



Die $E_\pm$ bezeichnen zwei Arme einer Hyperbel, und man sieht, dass die Störung $|w_{12}|$ die Entartung für $\Delta = 0$ aufhebt, und dass sie die Kreuzung der zwei Energieniveaus E_1 und E_2 vermeidet. Dieses Phänomen ist als "Avoided Crossing" bekannt.

(c) Der gestörter Hamiltonian H lässt sich im Form

$$H = E_\mathrm{m}\,\mathbb{1} + \Delta\cdot K \quad ; \quad K = \begin{pmatrix} 1 & \tan\theta\,\mathrm{e}^{-i\phi} \\ \tan\theta\,\mathrm{e}^{i\phi} & -1 \end{pmatrix}$$

schreiben. Offensichtlich haben H und K die gleiche Eigenvektoren. Mit der Diagonalisierungbedienung $\det(K - \kappa\mathbb{1}) = 0$ erhält man

$$0 = \det(K - \kappa\mathbb{1}) = \kappa^2 - 1 - \tan^2\theta = \kappa^2 - \frac{1}{\cos^2\theta}$$

und damit $\kappa_\pm = \pm\frac{1}{\cos\theta}$.

Wir schreiben den Eigenvektor $|\psi_+\rangle$ (zum Eigenwert κ_+) in der Basis $|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$ als $|\psi_+\rangle = \alpha|\phi_1\rangle + \beta|\phi_2\rangle$. Als Eigenvektor von K muss $|\psi_+\rangle$ die Gleichung $K|\psi_+\rangle = \kappa_+|\psi_+\rangle$ erfüllen. Also:

$$\begin{pmatrix} 1 & \tan\theta\,\mathrm{e}^{-i\phi} \\ \tan\theta\,\mathrm{e}^{i\phi} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \frac{1}{\cos\theta}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} \ .$$

Die erste Zeile läutet

$$\left(1 - \frac{1}{\cos\theta}\right)\alpha + \tan\theta\,\mathrm{e}^{-i\phi}\,\beta = 0 \ .$$

Nach Multiplizieren mit $\mathrm{e}^{i\phi/2}\frac{\cos\theta}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ erhält man

$$-\left(\sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{i\phi/2}\right)\alpha + \left(\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{-i\phi/2}\right)\beta = 0 \ .$$

Ein normierter Eigenvektor ist dann durch (2) gegeben. Analog folgt der Ausdruck (3), mit der Gleichung $K|\psi_-\rangle = \kappa_-|\psi_-\rangle$.

Wenn $|\Delta| \ll |w_{12}|$ gilt, dann ist $\tan\theta \to \infty$ und $\theta \approx \frac{\pi}{2}$. In dem Fall wird $|\psi_\pm\rangle \approx \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\pm\mathrm{e}^{-i\frac{\phi}{2}}|\phi_1\rangle + \mathrm{e}^{i\frac{\phi}{2}}|\phi_2\rangle\right)$ fast eine gleichgewichte Superposition von $|\phi_1\rangle$ und $|\phi_2\rangle$ (angenommen wird $\Delta > 0$, sonst wird $\theta \approx -\frac{\pi}{2}$ und wechseln sich ein Paar Vorzeichen).

Wenn $|\Delta| \gg |w_{12}|$ gilt, dann wird $\tan\theta \to 0^\pm$, und mit die Bedienung $0 \leqslant \theta < \pi$ wird entsprechend $\theta \approx 0$ bzw. $\theta \approx \pi$, und werden $|\psi_+\rangle \approx |\phi_1\rangle$, $|\psi_-\rangle \approx |\phi_2\rangle$ (bzw. $|\psi_+\rangle \approx |\phi_2\rangle$, $|\psi_-\rangle \approx |\phi_1\rangle$ wenn $\Delta \to -\infty$). Wichtig in dem Fall ist, dass die gestörte Eigenzustände fast gleich zu den ungestörten Eigenzustände sind.

(d) Durch eine inverse Rotation mit $\theta/2$ von Gl. (2) und (3) bekommt man

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-i\frac{\phi}{2}}|\phi_1\rangle &= \cos\frac{\theta}{2}\,|\psi_+\rangle - \sin\frac{\theta}{2}\,|\psi_-\rangle \ ; \\ \mathrm{e}^{i\frac{\phi}{2}}|\phi_2\rangle &= \sin\frac{\theta}{2}\,|\psi_+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\,|\psi_-\rangle \ ,\end{aligned}$$

was auf

$$|\phi_1\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\phi}{2}}\,|\psi_+\rangle - \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\phi}{2}}\,|\psi_-\rangle \ ; \tag{5}$$

$$|\phi_2\rangle = \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\phi}{2}}\,|\psi_+\rangle + \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\phi}{2}}\,|\psi_-\rangle \tag{6}$$

führt.

Die Evolution in der Zeit von den Energie-Eigenzuständen $|\psi_\pm\rangle$ ist durch eine Phase gegeben: $\mathrm{e}^{-iE_\pm t/\hbar}|\psi_\pm\rangle$. Dann ist die Evolution des Zustands $|\psi(t=0)\rangle = |\phi_1\rangle$ durch die Evolution Ihrer durch (5) gegebenen Energie-Eigenzustands-Komponenten bestimmt,

$$|\psi(t)\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\phi}{2}}\,\mathrm{e}^{-iE_+t/\hbar}|\psi_+\rangle - \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\phi}{2}}\,\mathrm{e}^{-iE_-t/\hbar}|\psi_-\rangle \ . \tag{7}$$

Um die Warscheinlichkeit $\mathscr{P}_{12}(t) = |\langle\phi_2\,|\,\psi(t)\rangle|^2$ zu berechnen, verwenden wir zuerst $\langle\phi_2|$ auf (7),

$$\langle\phi_2\,|\,\psi(t)\rangle = \mathrm{e}^{i\frac{\phi}{2}}\left[\cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{-iE_+t/\hbar}\,\langle\phi_2\,|\,\psi_+\rangle - \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{-iE_-t/\hbar}\,\langle\phi_2\,|\,\psi_-\rangle\right] \ ,$$

wobei wir aus (2) und (3) $\langle\phi_2|\psi_+\rangle = \sin\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\phi}{2}}$ bzw. $\langle\phi_2|\psi_-\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\phi}{2}}$ lesen können. Man erhält

$$\langle\phi_2|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\phi}\,\sin\theta\left(\mathrm{e}^{-iE_+t/\hbar} - \mathrm{e}^{-iE_-t/\hbar}\right) \ .$$

Mit $\delta := \frac{1}{2}(E_+ - E_-) = \sqrt{\Delta^2 + |w_{12}|^2}$ und $E_\mathrm{m} = \frac{1}{2}(E_+ + E_-)$ bekommen wir $E_\pm = E_\mathrm{m} \pm \delta$ und

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_{12}(t) &= \frac{1}{4}\sin^2\theta\cdot\left|\mathrm{e}^{-iE_+t/\hbar} - \mathrm{e}^{-iE_-t/\hbar}\right|^2 = \frac{1}{4}\sin^2\theta\cdot\left|\mathrm{e}^{iE_\mathrm{m}t/\hbar}\left(\mathrm{e}^{-i\delta t/\hbar} - \mathrm{e}^{i\delta t/\hbar}\right)\right|^2 \\ &= \frac{1}{4}\sin^2\theta\cdot\left|\mathrm{e}^{i\delta t/\hbar} - \mathrm{e}^{-i\delta t/\hbar}\right|^2 = \frac{|w_{12}|^2}{|w_{12}|^2+\Delta^2}\cdot\sin^2\frac{\delta\cdot t}{\hbar} \ ,\end{aligned}$$

wobei die Nebenrechnung

$$\sin^2\theta = \tan^2\theta\,\cos^2\theta = \frac{|w_{12}|^2}{\Delta^2}\,\frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{|w_{12}|^2}{|w_{12}|^2+\Delta^2}$$

ergeben hat. Dann gilt

$$\mathscr{P}_{12}(t) = \frac{4|w_{12}|^2}{4|w_{12}|^2+\Delta^2}\cdot\sin^2\left(\sqrt{|w_{12}|^2+\Delta^2}\cdot\frac{t}{\hbar}\right) \ .$$

(e) Entwicklung zur 2. Ordnung des Potientials am Minimum $x = x_0$ ergibt (nach Koordinatenverschiebung $x' = x - x_0$)

$$V(x') = \frac{1}{2}\left(\left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=x_0}\right)x'^2 = \frac{1}{2}\,a\,x'^2 \ ,$$

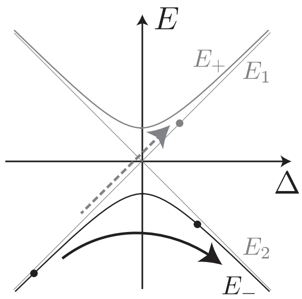
und damit ist der Hamiltonian für den rechten "Topf"

$$H = \frac{P^2}{2m} + \frac{1}{2}\,a\,x'^2 \ ,$$

was ein Harmonischer Oszillator mit $a = m\omega^2$ ist. Die bekannte Grundzustandsenergie eines Harmonischen Oszillators ist dann

$$E_0 \approx \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\frac{a}{m}} \ .$$

(f) Diese Änderung des Elektrischen Feldes bringt uns von Δ stark negativ zu Δ stark positiv (wir können annehmen, dass $E_\mathrm{m} = 0$). Man kann die Evolution der Zustand auf der Skizze in Teil (b) folgen:



Nach der Änderung von $\Delta \ll 0$ zur $\Delta \gg 0$ wird das Elektron dem schwarze Pfeil folgen, und sich schliesslich im Zustand $|\phi_2\rangle$ finden. Physikalisch ist dies einleuchtend, weil eine endlich-hohe Potentialbarriere Elektron-Tunneling erlaubt, während eine unendlich-hohe Potentialbariere Elektron-Tunneling verbietet. Wenn es keine Störung gäbe (perfekte entkoppelte "Töpfe") dann wäre das Elektron im gleichen Zustand geblieben (grau gezeichnet in der Abbildung).

Diese Übung ist stark basiert auf Cohen-Tannoudji et al., *Quantum Mechanics*, Kap. IV C, dessen Lektüre zusätzliche Informationen zum Thema und weitere Anwendungen empfohlen wird.

Übung 3. ***Kugelfunktionendarstellung von so(3).***

(a) Überzeuge dich mit geometrischen Überlegungen, dass Drehungen um die x-, y- und z-Achse in 3 Dimensionen, sich in Kugelkoordinaten wie folgt schreiben lassen (für kleine Winkel χ):

$$\begin{aligned} R_x(\chi) &: (\theta, \phi) \to (\theta - \chi \cdot \sin\phi,\ \phi - \chi \cdot \cot\theta \cos\phi) \ ; \\ R_y(\chi) &: (\theta, \phi) \to (\theta + \chi \cdot \cos\phi,\ \phi - \chi \cdot \cot\theta \sin\phi) \ ; \\ R_z(\chi) &: (\theta, \phi) \to (\theta,\ \phi + \chi) \ . \end{aligned} \tag{8}$$

(b) Wir betrachten jetzt die durch (7.1.5) gegebene Wirkung von $SO(3)$ auf die Funktionen auf der Kugel,

$$(U(R)\,\psi)(\vec{x}) = \psi(R^{-1}\,\vec{x}) \ . \tag{9}$$

Berechne explizite Ausdrücke für die Generatoren der obigen Drehungen

$$M_j = i\,\frac{d}{d\chi}\,U(R_j(\chi))\bigg|_{\chi=0} \ , \tag{10}$$

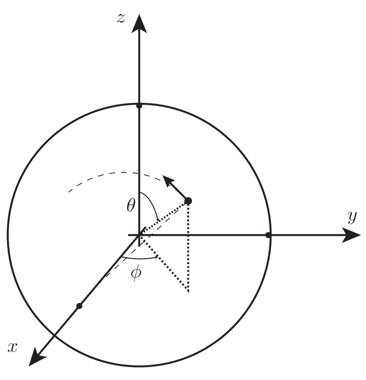
und zeige, dass

$$M_3 = -i\frac{\partial}{\partial\phi} \quad ; \quad M_\pm = \mathrm{e}^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\frac{\partial}{\partial\phi}\right) \ , \tag{11}$$

gilt (wobei $M_\pm = M_1 \pm iM_2$).

Lösung.

(a) Eine geometrische Überlegung auf die Kugel gibt, z.B. für R_x:



Die Änderung von den Winkel θ und ϕ passen zu die Formeln (8). Analog kann man R_y und R_z betrachten.

(b) Mit die Wirkung (9) bekommt man für $R_x(\chi)$ im 1. Ordnung in χ,

$$\begin{aligned} (U(R_x(\chi))\,\psi)\,(\theta,\phi) &= \psi(R_x(-\chi)\,\vec{x}) \approx \psi(\theta + \chi\sin\phi,\ \phi + \chi\cot\theta\cos\phi) \approx \psi(\theta,\phi) + \sin\phi\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,\chi + \cot\theta\cos\phi\,\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\,\chi \\ &= \psi(\theta,\phi) + \chi\cdot\underbrace{\left(\sin\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right)}_{-iM_1}\psi \ . \end{aligned}$$

Für R_y und R_z folgt analog,

$$\begin{aligned}
(U(R_y(\chi))\,\psi)\,(\theta,\phi) &= \psi(R_y(-\chi)\,\vec{x}) \approx \psi(\theta - \chi\cos\phi,\ \phi + \chi\cot\theta\sin\phi) \approx \psi(\theta,\phi) - \cos\phi\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,\chi + \cot\theta\sin\phi\,\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\,\chi \\
&= \psi(\theta,\phi) + \chi\cdot\underbrace{\left(-\cos\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right)}_{-iM_2}\psi\ ; \\
(U(R_y(\chi))\,\psi)\,(\theta,\phi) &= \psi(R_z(-\chi)\,\vec{x}) \approx \psi(\theta,\ \phi - \chi) \approx \psi(\theta,\phi) - \frac{\partial\psi}{\partial\phi}\,\chi \\
&= \psi(\theta,\phi) + \chi\cdot\underbrace{\left(-\frac{\partial}{\partial\phi}\right)}_{-iM_2}\psi\ .
\end{aligned}$$

Und damit

$$\begin{aligned}
M_1 &= i\sin\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\cos\phi\,\frac{\partial}{\partial\phi}\ ; \\
M_2 &= -i\cos\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\sin\phi\,\frac{\partial}{\partial\phi}\ ; \\
M_3 &= -i\,\frac{\partial}{\partial\phi}\ .
\end{aligned}$$

Schliesslich gilt

$$\begin{aligned}
M_\pm = M_1 \pm iM_2 &= i\left[\sin\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\cos\phi\,\frac{\partial}{\partial\phi} \pm i\left(-\cos\phi\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta\sin\phi\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\right] \\
&= \pm\left(\cos\phi \pm i\sin\phi\right)\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\left(\cos\phi \pm i\sin\phi\right)\frac{\partial}{\partial\phi} = \mathrm{e}^{\pm i\phi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\phi}\right)\ .
\end{aligned}$$