Übung 1. ***Wasserstoffatom und der Lenz'sche Vektor***

Die $(2l+1)$-fache Entartung des Energiespektrums des Wasserstoffatoms ist eine Konsequenz der Erhaltung des Drehimpulses. Die totale n^2-Entartung im Wasserstoffatom ist die Konsequenz einer weiteren Erhaltungsgrösse, des Lenz'schen Vektors. Hier möchten wir die n^2-Entartung herleiten. Die Übungsaufgabe ist als Ergänzung zum Kapitel 8.3 im Skript gedacht. Sie enthält Berechnungen, die dort nicht explizit durchgeführt, deren Resultate aber verwendet werden.

Der Lenz'sche Vektor ist gegeben durch ($|\vec{x}| = r$)

$$\vec{J} = \frac{1}{2\mu}(\vec{p} \wedge \vec{L} - \vec{L} \wedge \vec{p}) - \kappa\frac{\vec{x}}{r}, \tag{1}$$

wobei μ die reduzierte Masse bezeichnet, und $\vec{p}$, $\vec{r}$ und $\vec{L}$ die Impuls-, Orts- und Drehimpulsoperatoren sind.

(a) Zeige, dass $[H, J_i] = 0, \;\; i = 1, 2, 3$.

Es gilt $\vec{L} \cdot \vec{J} = 0$ und

$$J^2 = \frac{2H}{\mu}(L^2 + \hbar^2) + \kappa^2, \tag{2}$$

das heisst, der Hamiltonian kann als Funktion der Erhaltungsgrössen L^2 und J^2 ausgedrückt werden. Wir führen den Operator

$$\vec{K} = \sqrt{\frac{-\mu}{2H}}\frac{1}{\hbar}\vec{J} \tag{3}$$

ein.

(b) Anstelle von $\vec{L}$ verwenden wir nun wie im Skript $\vec{M} = \vec{L}/\hbar$. Zeige die zweite Relation (8.3.10) im Skript,

$$[M_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k \tag{4}$$

sowie

$$H = -\frac{\mu\kappa^2}{2\hbar^2(K^2 + M^2 + 1)}. \tag{5}$$

Der Beweis der ersten Gleichung (8.3.10) ist sehr aufwendig und wird nicht verlangt, das Resultat

$$[K_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}M_k \tag{6}$$

kann ohne Beweis weiter verwendet werden.

Der Operator $\vec{K}$ ist nur für $H < 0$ selbstadjungiert. Da wir uns für die gebundenen Zustände interessieren, ist dies jedoch kein Problem. Wir definieren nun $\vec{S} = (\vec{M} + \vec{K})/2$ und $\vec{D} = (\vec{M} - \vec{K})/2$.

(c) Zeige die Relationen (8.3.13),

$$[S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk}S_k, \quad [D_i, D_j] = i\epsilon_{ijk}D_k, \quad [S_i, D_j] = 0. \tag{7}$$

(d) Schreibe den Hamilton Operator als Funktion von $\vec{S}$ und $\vec{D}$.

(e) Konstruiere die Eigenzustände des Hamiltonians unter Verwendung der bisherigen Resultate.

(f) Bestimme den Grad der Entartung der Energieeigenwerte.

Übung 2. ***Partnerpotentiale***

Betrachte die beiden Hamiltonoperatoren auf $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

$$H_\pm = -\frac{d^2}{dx^2} + q^2(x) \pm q'(x) \tag{8}$$

für eine reelle Funktion $q(x)$. Zeige:

(a) $H_\pm \geq 0$.

(b) Die Partner $H_\pm$ haben dieselben Eigenwerte λ mit der möglichen Ausnahme von $\lambda = 0$.

(c) $\lambda = 0$ kann Eigenwert von höchstens einem Partner sein. Für welche $q(x)$ ist dies der Fall? Die Anwort ist "topologisch": sie ändert sich nicht, wenn $q(x)$ auf einem beschränkten Intervall abgeändert wird.

Hinweise: Für welche Funktion $q(x)$ ist (8) mit dem harmonischen Oszillator verwandt? Passe die Definition des Vernichtungsoperators a so an, dass $H_\pm = a_\mp a_\pm$ mit $a_- = a$, $a_+ = a^\dagger$, und verwende ihn wie in der Vorlesung. Zu (c): formuliere die Antwort anhand einer Stammfunktion $Q(x)$ von $q(x)$, $(Q' = q)$.

Übung 3. ***Energiespektrum des Wasserstoffatoms***

Ziel der Aufgabe ist es, die Energien der gebundenen Zustände des H-Atoms auf alternativem Wege zu finden (Schrödinger 1940). In Einheiten $\hbar^2/2m = e^2 = 1$ ist der radiale Hamiltonoperator für Wellen mit Drehimpuls $l = 0, 1, 2, \ldots$

$$H_l = -\frac{d^2}{dr^2} + \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{1}{r} \qquad \text{auf } L^2[0, \infty)\ .$$

(a) Bestimme E_l so, dass $H_-^{(l)} = H_l - E_l$ von der Form (8) ist und Eigenwert 0 hat.
Hinweis: Wähle den Ansatz $q(r) = a + br^{-1}$.

(b) Zeige: Der Partner ist $H_+^{(l)} = H_{l+1} - E_l$.

(c) Bestimme die (negativen) Eigenwerte von H_l mit Hilfe der Eigenschaften (2a-2c).