Übung 1. *Drehimpulsaddition*

Betrachte den Spin eines Systems aus einem Teilchen mit Spin $s_1 = 1$ und einem Teilchen mit Spin $s_2 = \frac{1}{2}$. Der Spinoperator des Systems sei $\vec{J} = \vec{S}^{(1)} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \vec{S}^{(2)}$. Wir schreiben kurz $\vec{S}^{(1)}$ statt $\vec{S}^{(1)} \otimes \mathbb{1}$. Für Darstellungen der Drehimpulsalgebra $[S_i, S_j] = \epsilon_{ijk} S_k$ benutze (in Einheiten $\hbar = 1$)

$$\vec{S}^2 |s, m\rangle = s(s+1) |s, m\rangle, S_3 |s, m\rangle = m |s, m\rangle, S_\pm |s, m\rangle = \sqrt{s(s+1) - m(m \pm 1)} |s, m \pm 1\rangle \tag{1}$$

für $S_\pm = S_1 \pm S_2$.

a) Zeige, dass $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk} J_k$. Das Tensorprodukt der Darstellungen s_1 und s_2 ist also wieder eine Darstellung der Drehimpuls-Algebra.

b) Im zusammengesetzten System haben wir eine Eigenbasis $\{|s_1, m_1\rangle \otimes |s_2, m_2\rangle\}$ zu $(\vec{S}^{(i)})^2$, $S_3^{(i)}$, und eine Eigenbasis $|j, m\rangle$ zu $\vec{J}^2$, J_3. Schreibe die $|j, m\rangle$ als Linearkombination der $|s_1, m_1\rangle \otimes |s_2, m_2\rangle$.

   Vorgehen: Bestimme den Zustand $|j, m^+\rangle$ mit der höchsten magnetischen Quantenzahl $m = m^+$. Wende $J_- = J_1 - iJ_2$ wiederholt auf diesen Zustand an, um die anderen Eigenzustände mit demselben Spin j zu finden. Wenn eine Potenz von J_- schliesslich den Zustand vernichtet, suche erneut den Zustand mit der höchsten magnetischen Quantenzahl im Komplement der bis dahin erzeugten Zustände, und verwende J_- erneut.

c) Überprüfe, dass die erhaltenen Clebsch-Gordan-Koeffizienten mit dem Resultat aus der Vorlesung übereinstimmen (Gleichung 9.5.10):

$$D_{l+1/2} : \left\langle l, \frac{1}{2}, m \mp \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \middle| l, \frac{1}{2}, l + \frac{1}{2}, m \right\rangle = \sqrt{\frac{l \pm m + \frac{1}{2}}{2l+1}} \tag{2}$$

   und

$$D_{l-1/2} : \left\langle l, \frac{1}{2}, m \mp \frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2} \middle| l, \frac{1}{2}, l - \frac{1}{2}, m \right\rangle = \mp\sqrt{\frac{l \mp m + \frac{1}{2}}{2l+1}} \tag{3}$$

Übung 2. *Additionen von drei Drehimpulsen*

Im folgenden wollen wir noch die Addition von drei Drehimpulsen behandeln. Man hat also Drehimpulsoperatoren $\vec{J}_1$, $\vec{J}_2$, $\vec{J}_3$ mit den jeweiligen Eigenzuständen $|j_i, m_i\rangle$, $i = 1, 2, 3$. Analog zum Fall der Kopplung von zwei Drehimpulsen suchen wir jetzt Eigenzustände von $\vec{J}^2 = (\vec{J}_1 + \vec{J}_2 + \vec{J}_3)^2$ und $J_z = J_{1z} + J_{2z} + J_{3z}$.

a) Kopple zunaechst J_1 und J_2 zu J_{12} wie gewohnt, und gib einen Ausdruck an für die Clebsch-Gordan Koeffizienten. Die Drehimpulse J_3 lassen wir vorerst unbeteiligt.

b) Dann kopple die beiden neuen 'Drehimpulse' J_{12} und J_3, und gib wieder die resultierenden Clebsch-Gordan Koeffizienten an.

c) Ist die quantenmechanische Drehimpulsaddition assoziativ? *Hinweis:* Betrachte dazu die 'guten Quantenzahlen', die für die Spezifikation der Zustände verwendet werden.

d) Um die Typen von Zuständen, die bei jeweils anderer Reihenfolge der Kopplung entstehen, ineinander umzuformen, benötigt man Koeffizienten der Form $\langle jm(j_1 j_2)j_3 j_{12}|jmj_1(j_2 j_3)j_{23}\rangle$. Wodurch sind diese bestimmt?

e) Stelle einen Zusammenhang her zwischen diesen Überlegungen und den unterschiedlichen Relevanzbereichen von L-S Kopplung und j-j-Kopplung in der Atomphysik. Wie wird dort jeweils approximiert?

Übung 3. *Der klassische Grenzfall*

In dieser Übungsaufgabe wollen wir nun die Ergebnisse der Drehimpulsaddition in klassischer Physik und die der Quantenmechanik vergleichen. In der klassischen Physik identifizieren wir den Drehimpuls mit dem Vektor $\vec{J} = \hbar \left\langle \vec{J} \right\rangle$, und der Drehimpuls des zusammengesetzten Systems ergibt sich aus der Vektoraddition der einzelnen Drehimpulse.

a) Gib eine Formel an für den Gesamtdrehimpuls J^2 in der klassischen Physik, und fertige eine Zeichnung zur Drehimpulsaddition an.

b) Nehme im Folgenden an, dass für $\vec{J_1} + \vec{J_2}$ alle Punkte *auf der Kugel* mit Radius J_2 um $\vec{J_1}$ gleich wahrscheinlich sind. Wie ist dann die Wahrscheinlichkeit dP, dass der Winkel Θ zwischen $\vec{J_1}$ und $\vec{J_2}$ im Intervall $(\Theta, \Theta + d\Theta)$ liegt?

c) Indem du die Änderung von J betrachtest, wenn sich Θ um $d\Theta$ ändert, drücke die Wahrscheinlichkeit dP mit Hilfe von J, J_1, J_2 aus.

d) Wie lautet die analoge Formel für den Anteil der Zustände mit Drehimpulszahl j in der Quantenmechanik? In welchem Falle entspricht dieser Ausdruck dem klassischen?