Übung 1. ***Stern-Gerlach (1922).***

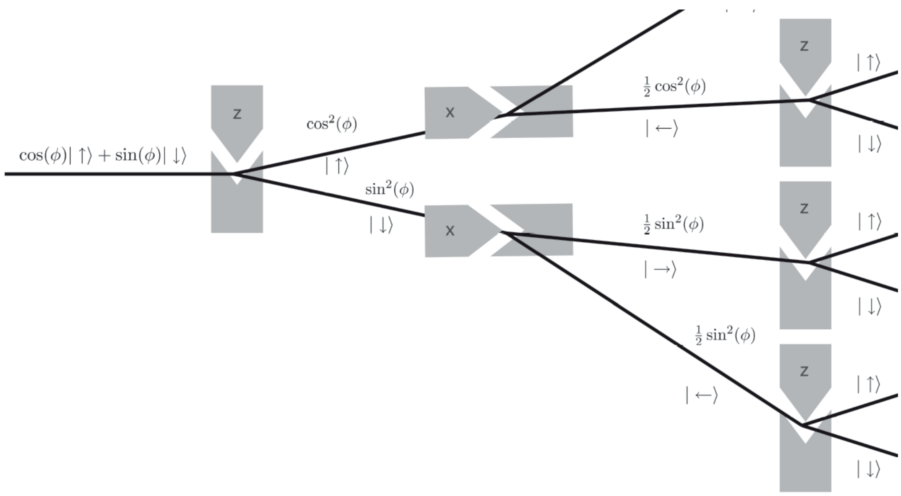
Ein Strahl aus ungeladenen Teilchen mit Spin $s = \frac{1}{2}$ läuft entlang der x-Achse und durchquert ein in z-Richtung stark inhomogenes Magnetfeld. Das Magnetfeld koppelt an den Spin entsprechend dem magnetischen Moment der Teilchen und spaltet den Strahl auf.

(a) Wähle eine geeignete Quantisierungsachse und nehme an, dass der Strahl bezüglich dieser Achse wie folgt polarisiert ist: $|\psi\rangle = \cos\phi\,|{\uparrow}\rangle + \sin\phi\,|{\downarrow}\rangle$. Gebe, abhängig vom Winkel ϕ, die Anzahl der auslaufenden Strahlen sowie die relative Teilchenzahl in den jeweiligen Strahlen an. Was passiert wenn die einzelnen auslaufenden Strahlen erneut durch einen baugleichen Magneten geleitet werden?

(b) Die auslaufenden Strahlen aus Aufgabenteil (a) werden separat durch einen weiteren Magneten geleitet, dessen Magnetfeld jedoch in x-Richtung orientiert ist. Gebe die Anzahl der auslaufenden Strahlen sowie die relative Teilchenzahl in den jeweiligen Strahlen an. Welche Rolle spielt dabei der Winkel aus Aufgabenteil (a)?

(c) Nachdem die Teilchen sowohl den Magneten mit Feld in z-Richtung, als auch den Magneten mit Feld in x-Richtung passiert haben, wird jeder der auslaufenden Strahlen wieder durch einen Magneten mit Feld in z-Richtung geleitet. In wieviel Strahlen spaltet jeder der Strahlen auf? Bestimme die relative Teilchenzahl zu allen auslaufenden Strahlen.

Lösung.



(a) Wir wählen die z-Achse als Quantisierungsachse. Das Durchlaufen des Magneten kann als Messung in der Basis $|{\uparrow}\rangle$, $|{\downarrow}\rangle$ beschrieben werden. Es sei $P_\uparrow = |{\uparrow}\rangle\langle{\uparrow}|$ und $P_\downarrow = |{\downarrow}\rangle\langle{\downarrow}|$. Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit der Messergebnisse, und damit die relative Teilchenzahl,

$$p_\uparrow = \langle\psi|P_\uparrow|\psi\rangle = \cos^2\phi\ ,$$
$$p_\downarrow = \langle\psi|P_\downarrow|\psi\rangle = \sin^2\phi\ .$$

Das heisst, dass der Strahl, ausser für $\phi = 0$ und $\phi = \pi/2$, immer in zwei Strahlen aufspaltet von denen einer im Zustand $\frac{P_\uparrow|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_\uparrow|\psi\rangle}} = |{\uparrow}\rangle$ und der andere, analog, im Zustand $|{\downarrow}\rangle$ ist. Treten die auslaufenden Strahlen erneut durch einen baugleichen Magneten findet keine weitere Aufspaltung statt, wie man sofort mit einer analogen Rechnung wie oben für die beiden auslaufenden Strahlen nachrechnen kann.

(b) Wir wählen die x-Achse als Quantisierungsachse und schreiben die Zustände der auslaufenden Strahlen aus Aufgabenteil (a) in der Basis $|{\rightarrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{\uparrow}\rangle + |{\downarrow}\rangle\right)$, $|{\leftarrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{\uparrow}\rangle - |{\downarrow}\rangle\right)$,

$$|{\uparrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{\rightarrow}\rangle + |{\leftarrow}\rangle\right)$$
$$|{\downarrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|{\rightarrow}\rangle - |{\leftarrow}\rangle\right)$$

Das Durchlaufen des Magneten mit inhomogenen Magnetfeld in x-Richtung kann durch durch eine Messung in der Basis $|{\rightarrow}\rangle$, $|{\leftarrow}\rangle$ beschrieben werden. Um die relative Teilchenzahl zu berechnen müssten wir jetzt wieder die Wahrscheinlichkeit der Messergebnisse berechnen. Die Rechnung ist identisch mit der in Aufgabenteil (a), ausser das die Aufspaltung nun in zwei Strahlen $|{\rightarrow}\rangle$ und $|{\leftarrow}\rangle$ gleicher Teilchenzahl erfolgt. Der Winkel ϕ spielt bei dieser Rechnung keine Rolle, wohl aber bei der Bestimmung der relativen Teilchenzahl aller vier Strahlen, siehe Abbildung.

(c) Diese Teilaufgabe ist identisch mit Teilaufgabe (b), nur dass wir hier wieder die z-Richtung als Quantisierungsachse wählen und die auslaufenden Zustände aus Aufgabenteil (b) in der z-Basis ausdrücken.

Übung 2. *Gestörter Harmonischer Oszillator.*

Sei $\hbar = c = \omega = 1$. Betrachte den gestörten harmonischen Oszillator

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + x^2\right) + g\,x^4 \tag{1}$$

mit $g \ll 1$.

(a) Finde die Energieeigenwerte E_n mit Störungstheorie erster Ordnung.

(b) Damit die Störungsreihe sinnvoll ist, brauchen wir

$$\left|\frac{g\,E_n^{(1)}}{E_n^{(0)}}\right| \ll 1\ .$$

Für welche Werte von n ist die Störungsreihe gültig?

(c) Zeige, dass die Standardabweichung

$$(\Delta x) = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

bei einem Zustand $|n\rangle$ proportional zu $\sqrt{2n+1}$ ist.

(d) Kommentiere die Dominanz der Störung $g\,x^4$ gegenüber dem ungestörten Potential $\frac{1}{2}\,x^2$ für hohe Energieniveaus.

Lösung. Seien $\{|n^{(0)}\rangle\}_n$ und $\{E_n^{(0)}\}_n$ die Energieeigenzustände und Eigenwerte des ungestörten Systems und seien $\{E_n\}_n$ die Energieeigenwerte des gestörten Systems. Der Hamiltonoperator

$$H_0 = \frac{1}{2}\left(p^2 + x^2\right)$$

beschreibt die Dynamik des ungestörten Systems. Der Hamiltonoperator des gestörten Systems ist gegen durch:

$$H = H_0 + \delta H$$

mit $\delta H = gV$ ($g \ll 1$). Die Störung δH ist parametrisiert durch die "Kopplungskonstante" g. Aus diesem Grund sind die Eigenwerte des gestörten Systems Funktionen $E_n = E_n(g)$ von g.[1] Die Funktionen $E_n(g)$ werden gut approximiert durch die ersten Terme

$$E_n^{(\text{approx})}(g) = E_n^{(0)} + gE_n^{(1)} + ... + g^N E_n^{(N)}$$

[1] Die Eigenwerte des Harmonischen Oszillators sind nicht degeneriert.

einer Potenzreihe

$$E_n(g) = E_n^{(0)} + gE_n^{(1)} + g^2 E_n^{(2)} + \mathcal{O}(g^3)$$

(meist nicht konvergent aber *asymptotisch*) für eine grosse Klasse von Hamiltonoperatoren (wie der in dieser Aufgabe).

(a) Aus der Theorie der Störungsrechnung folgt

$$E_n^{(1)} = \langle n^{(0)}|V|n^{(0)}\rangle = \langle n^{(0)}|x^4|n^{(0)}\rangle.$$

Mit den Auf- und Absteigeoperatoren $a^\dagger$, a,

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - ip), \quad a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip),$$

folgt für die Observable x:

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^\dagger).$$

Somit ergibt sich der Störungsoperator in Abhängigkeit der Auf- und Absteigeoperatoren

$$\begin{aligned} x^4 = \frac{1}{4}\big(&a^4 + (a^\dagger)^4 + a^2(a^\dagger)^2 + (a^\dagger)^2a^2 + 2a^2 + 2(a^\dagger)^2 + 4N^2 + 4N \\ &+ 2N(a^2 + (a^\dagger)^2) + 2(a^2 + (a^\dagger)^2)N + 1\big) \end{aligned} \tag{2}$$

($N := a^\dagger a$). Für die Berechnung von $\langle n^{(0)}|x^4|n^{(0)}\rangle$ braucht man in (2) nur diejenigen Terme zu berücksichtigen, welche eine gleiche Anzahl von Auf- und Abstiegeoperatoren besitzen, da

$$a|n^{(0)}\rangle = \sqrt{n}\,|n^{(0)} - 1\rangle, \quad a^\dagger|n^{(0)}\rangle = \sqrt{n+1}\,|n^{(0)} + 1\rangle,$$

und

$$\langle n^{(0)}|m^{(0)}\rangle = \delta_{mn}.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} &= \langle n^{(0)}|x^4|n^{(0)}\rangle \\ &= \frac{1}{4}\langle n^{(0)}|\big(a^2(a^\dagger)^2 + (a^\dagger)^2a^2 + 4N^2 + 4N + 1\big)|n^{(0)}\rangle \\ &= \frac{3}{4}\big(2n^2 + 2n + 1\big) \end{aligned} \tag{3}$$

wobei benutzt wurde, dass

$$[a, a^\dagger] = 1$$

und

$$N|n^{(0)}\rangle = n|n^{(0)}\rangle.$$

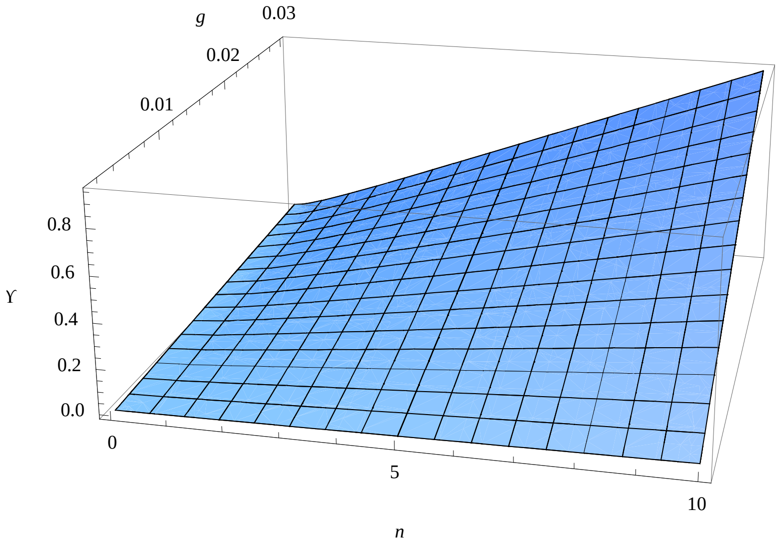
(b) Unter Verwendung von (3) bekommt man

$$\Upsilon(n,g) := \left|\frac{g_0 E_n^{(1)}}{E_n^{(0)}}\right| = \frac{\frac{3}{4}g_0\big(2n^2 + 2n + 1\big)}{n + \frac{1}{2}} \ll 1$$

weil die Energieeigenwerte des ungestörten Harmonischen Oszillators durch

$$E_n^{(0)} = n + \frac{1}{2}$$

gegeben sind ($\hbar \equiv c \equiv \omega \equiv 1$). In der folgenden Abbildung ist der Zusammenhang zwischen Υ, n und g dargestellt.



(c) Unter Benutzung der Orthogonalität der ungestörten Eigenzustände und der Komutatorrelation $[a, a^\dagger] = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned}(\Delta x) &= \sqrt{\langle n^{(0)}|x^2|n^{(0)}\rangle - \langle n^{(0)}|x|n^{(0)}\rangle^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{2}\langle n^{(0)}|\big(a^2 + (a^\dagger)^2 + 2N + 1\big)|n^{(0)}\rangle - \frac{1}{2}\langle n^{(0)}|\big(a + a^\dagger\big)|n^{(0)}\rangle^2} \\ &\propto \sqrt{2n+1}.\end{aligned} \tag{4}$$

(d) Die Standardabweichung $(\Delta x) \propto \sqrt{2n+1}$ ist ein Mass für die Ausdehnung der Wellenfunktion $|n^{(0)}\rangle$. Aber desto ausgedehnter $|n^{(0)}\rangle$ ist, desto grösser ist der Einfluss des Terms gx^4 bis er schlussendlich den Term $\frac{x^2}{2}$ dominiert.

Übung 3. *Quantenteleportation.*

Alice besitzt ein Spin-1/2 Teilchen in einem unbekannten Zustand $|\phi_1\rangle$. Sie möchte Bob diesen Zustand senden, darf aber nur klassisch mit Bob kommunizieren, d.h. sie darf Bob nur klassische Bits mitteilen. Wir nehmen nun an, dass Alice und Bob je ein Spin-1/2 Teilchen eines EPR-Paars besitzen, das sie bei einem früheren Treffen ausgetauscht haben.

In dieser Übung wird gezeigt, dass Alice diese “Quantenteleportation” ausführen kann. Historisch wurde dieses Protokoll 1993 von Charles Bennett et al. entdeckt (Phys. Rev. Lett. 70(13):1895–1899, 1993). Diese Übung folgt der Notation dieses Originalpapers.

Der Zustand des EPR-Paars lässt sich in folgender Form schreiben:

$$|\Psi_{23}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow_2\rangle|\downarrow_3\rangle - |\downarrow_2\rangle|\uparrow_3\rangle\right) ,$$

wobei “2” und “3” die jeweiligen Teilchen von Alice und Bob indizieren. Der unbekannte Zustand von Alice lässt sich als Linearkombination der Basis $|\uparrow_1\rangle$, $|\downarrow_1\rangle$ schreiben:

$$|\phi_1\rangle = a\,|\uparrow_1\rangle + b\,|\downarrow_1\rangle ,$$

wobei $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Alice misst die Teilchen “1” und “2” (die in ihrem Besitz sind) in der sog. Bellbasis:

$$
\begin{aligned}
|\Psi_{12}^{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle \pm |\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle\right) \ , \\
|\Phi_{12}^{\pm}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle \pm |\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle\right) \ .
\end{aligned} \tag{5}
$$

(a) Schreibe den Zustand $|\psi_{123}\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\Psi_{23}^{-}\rangle$ des zusammengesetzten Systems in der Bellbasis (5) für die Teilchen “1” und “2” aus. Was sind die Wahrscheinlichkeiten der vier verschiedenen Messresultate? Was ist, für jedes Messresultat, der Zustand nach der Messung? Insbesondere, was ist der Zustand von Bobs Teilchen?

(b) Alice teilt Bob mit, welches Messresultat sie bekommen hat (diese Information wird mit Hilfe von zwei klassischen Bits beschrieben, die sie Bob senden darf). Was kann Bob tun, um den ursprünglichen, Alice unbekannten Zustand $|\phi_1\rangle$ zu rekonstruieren?

Lösung. Hier wird die Lösung zu den gestellten Fragen gegeben; für zusätzliche Informationen wird empfohlen, das Kapitel im Skript und/oder das Originalpaper zu lesen.

(a) Der Zustand $|\psi_{123}\rangle$ lässt sich in folgender Form schreiben:

$$
\begin{aligned}
|\psi_{123}\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\Psi_{23}^{-}\rangle &= \frac{a}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow_1\uparrow_2\downarrow_3\rangle - |\uparrow_1\downarrow_2\uparrow_3\rangle\right) + \frac{b}{\sqrt{2}}\left(|\downarrow_1\uparrow_2\downarrow_3\rangle - |\downarrow_1\downarrow_2\uparrow_3\rangle\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[|\Psi_{12}^{-}\rangle\left(-a\,|\uparrow_3\rangle - b\,|\downarrow_3\rangle\right) + |\Psi_{12}^{+}\rangle\left(-a\,|\uparrow_3\rangle + b\,|\downarrow_3\rangle\right) + |\Phi_{12}^{-}\rangle\left(a\,|\downarrow_3\rangle + b\,|\uparrow_3\rangle\right) + |\Phi_{12}^{+}\rangle\left(a\,|\downarrow_3\rangle - b\,|\uparrow_3\rangle\right)\right] \ .
\end{aligned} \tag{6}
$$

Aus (6) kann man lesen, dass die Messresultate $|\Psi_{12}^{\pm}\rangle$ und $|\Phi_{12}^{\pm}\rangle$ je mit Wahrscheinlichkeit 1/4 vorkommen. Nach Alices Messung wird der Zustand $|\psi_{123}\rangle$ auf einen von den vier Termen in (6) projeziert. Insbesondere wird Bobs Teilchen je nach Messresultat auf einen der folgenden Zustände projeziert:

$$
\begin{aligned}
-|\phi_3\rangle \ , \qquad & \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle \\
\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle \ , \qquad & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle \ ,
\end{aligned}
$$

wobei $|\phi_3\rangle = a\,|\uparrow_3\rangle + b\,|\downarrow_3\rangle$.

(b) Wenn Bob weiss, auf welchen Zustand sein Teilchen projeziert worden ist, braucht er nur die relevante unitäre Operation anzuwenden, um den Zustand $|\phi_3\rangle$ zu rekonstruieren.