### Übung 1. *Stern-Gerlach (1922).*

Ein Strahl aus ungeladenen Teilchen mit Spin $s = \frac{1}{2}$ läuft entlang der x-Achse und durchquert ein in z-Richtung stark inhomogenes Magnetfeld. Das Magnetfeld koppelt an den Spin entsprechend dem magnetischen Moment der Teilchen und spaltet den Strahl auf.

(a) Wähle eine geeignete Quantisierungsachse und nehme an, dass der Strahl bezüglich dieser Achse wie folgt polarisiert ist: $|\psi\rangle = \cos\phi\,|\uparrow\rangle + \sin\phi\,|\downarrow\rangle$. Gebe, abhängig vom Winkel $\phi$, die Anzahl der auslaufenden Strahlen sowie die relative Teilchenzahl in den jeweiligen Strahlen an. Was passiert wenn die einzelnen auslaufenden Strahlen erneut durch einen baugleichen Magneten geleitet werden?

(b) Die auslaufenden Strahlen aus Aufgabenteil (a) werden separat durch einen weiteren Magneten geleitet, dessen Magnetfeld jedoch in x-Richtung orientiert ist. Gebe die Anzahl der auslaufenden Strahlen sowie die relative Teilchenzahl in den jeweiligen Strahlen an. Welche Rolle spielt dabei der Winkel aus Aufgabenteil (a)?

(c) Nachdem die Teilchen sowohl den Magneten mit Feld in z-Richtung, als auch den Magneten mit Feld in x-Richtung passiert haben, wird jeder der auslaufenden Strahlen wieder durch einen Magneten mit Feld in z-Richtung geleitet. In wieviel Strahlen spaltet jeder der Strahlen auf? Bestimme die relative Teilchenzahl zu allen auslaufenden Strahlen.

### Übung 2. *Gestörter Harmonischer Oszillator.*

Sei $\hbar = c = \omega = 1$. Betrachte den gestörten harmonischen Oszillator

$$H = \frac{1}{2}\left(p^2 + x^2\right) + g\,x^4 \tag{1}$$

mit $g \ll 1$.

(a) Finde die Energieeigenwerte $E_n$ mit Störungstheorie erster Ordnung.

(b) Damit die Störungsreihe sinnvoll ist, brauchen wir

$$\left|\frac{g\,E_n^{(1)}}{E_n^{(0)}}\right| \ll 1\ .$$

Für welche Werte von n ist die Störungsreihe gültig?

(c) Zeige, dass die Standardabweichung

$$(\Delta x) = \sqrt{\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2}$$

bei einem Zustand $|n\rangle$ proportional zu $\sqrt{2n+1}$ ist.

(d) Kommentiere die Dominanz der Störung $g\,x^4$ gegenüber dem ungestörten Potential $\frac{1}{2}\,x^2$ für hohe Energieniveaus.

**Übung 3.** ***Quantenteleportation.***

Alice besitzt ein Spin-1/2 Teilchen in einem unbekannten Zustand $|\phi_1\rangle$. Sie möchte Bob diesen Zustand senden, darf aber nur klassisch mit Bob kommunizieren, d.h. sie darf Bob nur klassische Bits mitteilen. Wir nehmen nun an, dass Alice und Bob je ein Spin-1/2 Teilchen eines EPR-Paars besitzen, das sie bei einem früheren Treffen ausgetauscht haben.

In dieser Übung wird gezeigt, dass Alice diese "Quantenteleportation" ausführen kann. Historisch wurde dieses Protokoll 1993 von Charles Bennett et al. entdeckt (Phys. Rev. Lett. 70(13):1895–1899, 1993). Diese Übung folgt der Notation dieses Originalpapers.

Der Zustand des EPR-Paars lässt sich in folgender Form schreiben:

$$|\Psi_{23}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\uparrow_2\rangle|\downarrow_3\rangle - |\downarrow_2\rangle|\uparrow_3\rangle \right) \ ,$$

wobei "2" und "3" die jeweiligen Teilchen von Alice und Bob indizieren. Der unbekannte Zustand von Alice lässt sich als Linearkombination der Basis $|\uparrow_1\rangle$, $|\downarrow_1\rangle$ schreiben:

$$|\phi_1\rangle = a\,|\uparrow_1\rangle + b\,|\downarrow_1\rangle \ ,$$

wobei $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Alice misst die Teilchen "1" und "2" (die in ihrem Besitz sind) in der sog. Bellbasis:

$$\begin{aligned} |\Psi_{12}^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\uparrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle \pm |\downarrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle \right) \ , \\ |\Phi_{12}^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left( |\uparrow_1\rangle|\uparrow_2\rangle \pm |\downarrow_1\rangle|\downarrow_2\rangle \right) \ . \end{aligned} \tag{2}$$

(a) Schreibe den Zustand $|\psi_{123}\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\Psi_{23}^-\rangle$ des zusammengesetzten Systems in der Bellbasis (2) für die Teilchen "1" und "2" aus. Was sind die Wahrscheinlichkeiten der vier verschiedenen Messresultate? Was ist, für jedes Messresultat, der Zustand nach der Messung? Insbesondere, was ist der Zustand von Bobs Teilchen?

(b) Alice teilt Bob mit, welches Messresultat sie bekommen hat (diese Information wird mit Hilfe von zwei klassischen Bits beschrieben, die sie Bob senden darf). Was kann Bob tun, um den ursprünglichen, Alice unbekannten Zustand $|\phi_1\rangle$ zu rekonstruieren?