Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Theorie der Wärme
Beispiele zur Legendretransformation

HS10
Prof. G. Blatter

Beispiel 1

Als erstes Beispiel betrachten wir die Legendretransformation von

$$f(x) = \frac{x^2}{2}, \tag{1}$$

vgl. Serie 5. Die Legendretransformation ist definiert als

$$f^*(p) = \sup_x \big[px - f(x) \big]. \tag{2}$$

Wir haben uns die Bedeutung dieser Definition in Serie 5 für dieses Beispiel geometrisch überlegt. $f^*(p)$ ist die grösste Differenz zwischen der Gerade px und der Funktion $f(x)$.
Da $f(x) = x^2/2$ auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist, können wir Extremalwerte von $px - f(x)$ (für gegebenes $p = p_0$) finden, indem wir die Nullstellen der Ableitung bestimmen, also

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(p_0 x - f(x)) = p_0 - f'(x) = p_0 - x. \tag{3}$$

Somit finden wir einen Extremalwert $p_0^2/2$ für $x = p_0$. Da $f(x)$ eine strikt konvexe Funktion ist, ist der gefundene Extremalwert ein Maximum. Indem man dies für alle p macht, erhält man

$$f^*(p) = \frac{p^2}{2}. \tag{4}$$

Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass die Funktion $f(x)$ stetig differenzierbar und strikt konvex ist, lässt sich die Legendre-Transformierte direkt mit

$$f^*(p) = \tilde{x}p - f(\tilde{x}) \tag{5}$$

berechnen, wobei $p = f'(\tilde{x})$.

Offensichtlich erhält man durch Legendretransformation von $f^*(p)$

$$f^{**}(x) = \frac{x^2}{2}, \tag{6}$$

was wiederum der ursprünglichen Funktion $f(x)$ entspricht. Allgemein ergibt sich für eine konvexe Funktion durch zweimalige Legendretransformation wiederum die ursprüngliche Funktion.

Beispiel 2

Als zweites Beispiel betrachten wir nun dieselbe Funktion $f(x) = x^2/2$ auf $[-1, 1]$, welche also nur für $x \in [-1, 1]$ definiert ist. Die Funktion ist nun wiederum auf ihrem Definitionsbereich stetig differenzierbar und strikt konvex. Man könnte deshalb nun geneigt sein, die Legendre-transformierte mithilfe von Gleichung (5) zu berechnen. Betrachten wir allerdings $f'(x) = x$, erkennen wir, dass dadurch nur für $p \in [-1, 1]$ die Legendretransformierte bestimmen können. In diesem Bereich finden wir

$$f^*(p) = \frac{p^2}{2} \qquad -1 < p < 1. \tag{7}$$

Für $p \notin [-1,1]$ müssen wir die eigentliche Definition der Legendretransformation, Gleichung (2), verwenden und finden

$$f^*(p) = \sup_{x\in[-1,1]} \Big(px - f(x)\Big) = \sup_{x\in[-1,1]} \Big(px - \frac{x^2}{2}\Big) = \begin{cases} \ \ p - \frac{1}{2}, & p > \ \ 1, \\ -p - \frac{1}{2}, & p < -1, \end{cases} \tag{8}$$

was aus Randmaxima bei $x = \pm 1$ resultiert, vgl. Fig. 2. Die Legendretransformierte ist also

$$f^*(p) = \begin{cases} p - \frac{1}{2}, & p > 1, \\ p^2/2, & 1 \leq p \leq -1, \\ -p - \frac{1}{2}, & p < -1. \end{cases} \tag{9}$$

Wir erkennen, dass die Legendretransformierte der Funktion $f(x) = x^2/2$ verschieden ist für die beiden Fälle, dass die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist oder dass die Funktion nur auf $[-1,1]$ definiert ist. Wir berechnen nun die Legendretransformierte f^{**} der Funktion f^*. f^* ist eine

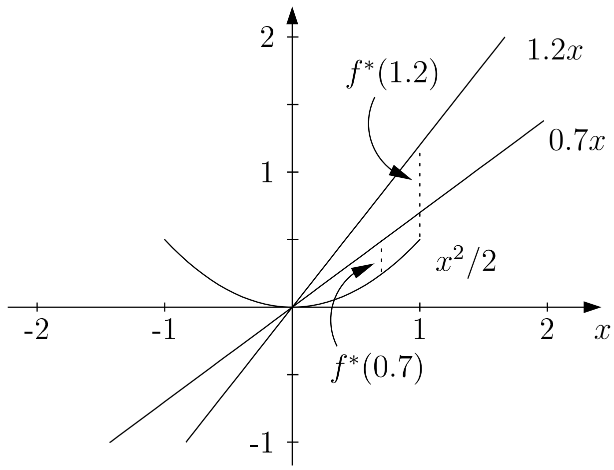

Abbildung 1: Im Gegensatz zu $f^*(0.7)$ ist $f^*(1.2)$ durch ein Randmaximum bestimmt.

stückweise definierte, stetig diffenzierbare, konvexe Funktion. Wir berechnen die Legendretransformation mit der Definition (2) als

$$\begin{aligned} f^{**}(x) &= \sup_p \Big(xp - f^*(p)\Big) \\ &= \max\Big(\sup_{p>1}\big(xp - (p - 1/2)\big), \sup_{1>p>-1}\big(xp - p^2/2\big), \sup_{p<-1}\big(xp - (-p - 1/2)\big)\Big). \end{aligned} \tag{10}$$

Wir betrachten nun zuerst $x \in [-1,1]$ und finden

$$\begin{aligned} f^{**}(-1 \leq x \leq 1) &= \max\Big(\sup_{p>1}\big(-p(1-x) + 1/2\big), \frac{x^2}{2}, \sup_{p<-1}\big(p(1+x) + 1/2\big)\Big) \\ &= \max\Big(x - 1/2, \frac{x^2}{2}, -x - 1/2\Big) = \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \tag{11}$$

Betrachten wir nun $x > 1$ ist

$$\sup_{p>1}\Big(p(x-1) + 1/2\Big) \tag{12}$$

nicht definiert, da $p(x-1)+1/2$ für $p \to \infty$ divergiert. Somit ist $f^{**}(x>1)$ nicht definiert. Analog finden wir, dass $f^{**}(x<-1)$ nicht definiert ist.

Wir finden, dass die zweifache Legendretransformation der Funktion $f(x) = x^2/2$, welche nur auf $[-1, 1]$ definiert ist, wieder die ursprüngliche Funktion definiert auf dem selben Intervall liefert.

Bemerkung: Die beiden Geraden der Funktion $f^*(p)$ werden durch die Legendretransformation auf die Punkte $x = \pm 1$ abgebildet.

Beispiel 3

Wir betrachten die konvexe Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x < 1, \\ 2x - 1, & x \geq 1. \end{cases} \tag{13}$$

Indem wir die Ableitung $f'(x)$ bilden,

$$f'(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ 2, & x \geq 1, \end{cases} \tag{14}$$

erkennen wir, dass die Funktion nicht stetig differenzierbar ist. Somit müssen wir die Legendretransformation gemäss der Definition (2) berechnen.
Wir betrachten zuerst $p < 0$ und erkennen, dass

$$f^*(p < 0) = \sup_x \big(px - f(x)\big) = \text{nicht definiert}, \tag{15}$$

da $px - f(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$. Für $p = 0$ gilt

$$f^*(0) = \sup_x \big(px - f(x)\big) = \max\Big(\sup_{x<1}(-1), \sup_{x\geq 1}(-(2x-1))\Big) = -1 \tag{16}$$

und somit wird die gesamte Gerade (für $x < 1$) auf einen Punkt abgebildet. Für $0 < p < 2$ finden wir

$$\begin{aligned} f^*(0 < p < 2) &= \sup_x \big(px - f(x)\big) \\ &= \max\Big(\sup_{x<1}\big(px - 1\big) \sup_{x\geq 1}\big(px - [2x-1]\big)\Big) \\ &= \max\Big(p - 1, \sup_{x\geq 1}\big(-[2-p]x + 1\big)\Big) \\ &= \max\Big(p-1, p-1\Big) = p - 1, \end{aligned} \tag{17}$$

wobei diese Gerade eine Transformation des Knicks von $f(x)$ bei $x = 1$ ist.
Wir finden des Weiteren

$$f^*(2) = \max\Big(\sup_{x<1}\big(2x - 1\big), \sup_{x\geq 1}\big(2x - [2x-1]\big) = 1, \tag{18}$$

wobei die ganze Gerade (für $x > 1$) auf einen Punkt abgebildet wird.
Da $px - f(x) \to \infty$ $(x \to \infty)$ für $p > 2$, ist $f^*(p > 2)$ nicht definiert.

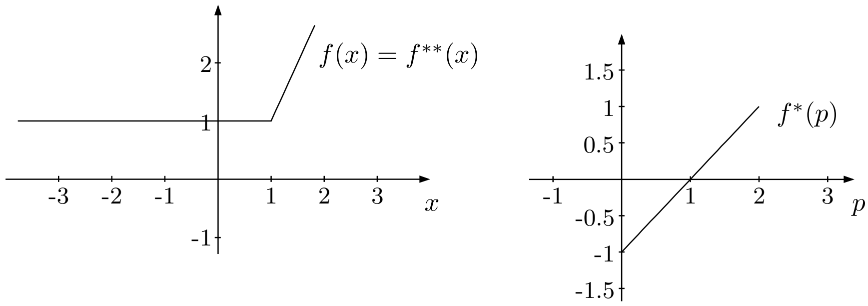

Abbildung 2: Die Legendretransformation der Funktion $f(x)$ liefert eine nur auf dem Intervall $[0, 2]$ definierte Funktion $f^*(p)$. Die Legendretransformation von $f^*(p)$, $f^{**}(x)$, ist identisch mit der ursprünglichen Funktion $f(x)$.

Wir finden somit als Legendretransformierte von $f(x)$ die auf $[0, 2]$ definierte Funktion

$$f^*(p) = p - 1, \qquad 0 \leq p \leq 2. \tag{19}$$

Diese Funktion können wir nun ein weiteres Mal Legendretransformieren und erhalten mit

$$f^{**}(x) = \sup_{0 \leq p \leq 2} \Big(xp - f^*(p) \Big) = \sup_{0 \leq p \leq 2} \Big(xp - p + 1 \Big), \tag{20}$$

$$f^{**}(x < 1) = \sup_{0 \leq p \leq 2} \Big(-(1 - x)p + 1 \Big) = 1, \tag{21}$$

$$f^{**}(x = 1) = \sup_{0 \leq p \leq 2} \Big(1 \Big) = 1 \tag{22}$$

$$f^{**}(x > 1) = \sup_{0 \leq p \leq 2} \Big((x - 1)p + 1 \Big) = 2x - 1. \tag{23}$$

Insgesamt erhalten wir

$$f^{**}(x) \begin{cases} 1, & x < 1, \\ 2x - 1, & x \geq 1, \end{cases} \tag{24}$$

und somit die ursprüngliche Funktion zurück.

Beispiel 4

Sei die Funktion $f(x)$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} + a, & x < 0, \\ \dfrac{x^2}{2}, & x \geq 0. \end{cases} \tag{25}$$

wobei a eine positive reelle Zahl darstellt. Auf jedem Teilgebiet ($x \geq 0$ und $x < 0$) ist f stetig differenzierbar und strikt konvex. Auf ganz $\mathbb{R}$ ist die Funktion aber nicht konvex und nicht stetig. Für die Legendretransformation gilt,

$$f^*(p) = \sup_x [px - f(x)] \tag{26}$$

$$= \max \Big\{ \sup_{x<0} [px - \frac{x^2}{2} - a], \ \sup_{x \geq 0} [px - \frac{x^2}{2}] \Big\}. \tag{27}$$

Wir untersuchen nun die beiden Suprema in Gl. (26) in Abhängigkeit des Wertes p.

$$\sup_{x<0}[px - \frac{x^2}{2} - a] = \begin{cases} \frac{p^2}{2} - a, & p < 0, \\ -a & p, \geq 0. \end{cases} \tag{28}$$

Das Supremum in Gl. (28) wird für $p < 0$ in einem Maximum der Funktion $px - f(x)$ angenommen, woduch sich f^* schreiben lässt als $f^*(p) = \tilde{x}p - f(\tilde{x})$ mit $p = f'(\tilde{x}) = \tilde{x}$. Für $p \geq 0$ wird das Supremum für kein $\tilde{x} < 0$ angenommen. Trotzdem erhalten wir dessen Wert im Limes $x \to 0_-$.

Für das zweite Supremum gilt analog

$$\sup_{x\geq 0}[px - \frac{x^2}{2}] = \begin{cases} 0, & p < 0, \\ \frac{p^2}{2}, & p \geq 0. \end{cases} \tag{29}$$

Somit finden wir, dass sich $f^*(p)$ schreiben lässt als

$$f^*(p) = \begin{cases} \max\{\frac{p^2}{2} - a,\ 0\}, & p < 0, \\ \max\{-a,\ \frac{p^2}{2}\}, & p \geq 0, \end{cases} \tag{30}$$

und damit

$$f^*(p) = \begin{cases} \frac{p^2}{2} - a, & p \leq -\sqrt{2a}, \\ 0, & -\sqrt{2a} \leq p \leq 0, \\ \frac{p^2}{2}, & 0 \leq p, \end{cases} \tag{31}$$

vgl. Fig. 3.
Im Prinzip ist nun die Rücktransformation in analoger Weise zu berechnen. Da unsere Legendretransformierte Funktion f^* aus drei Teilstücken besteht, wird sich das Supremum in ein Maximum aus drei stückweisen Suprema zusammensetzen.

$$f^{**}(z) = \max\Big\{\sup_{p\leq-\sqrt{2a}}[zp - \frac{p^2}{2} + a],\ \sup_{-\sqrt{2a}\leq p\leq 0}[zp],\ \sup_{p\geq 0}[zp - \frac{p^2}{2}]\Big\}. \tag{32}$$

Wiederum berechnen wir die "Teilsuprema" einzeln, d.h.

$$\sup_{p\leq-\sqrt{2a}}[zp - \frac{p^2}{2} + a] = \begin{cases} \frac{z^2}{2} + a, & z \leq -\sqrt{2a}, \\ -\sqrt{2a}\ z, & z \geq -\sqrt{2a}, \end{cases} \tag{33}$$

$$\sup_{-\sqrt{2a}\leq p\leq 0}[zp] = \begin{cases} -\sqrt{2a}\ z, & z \leq 0, \\ 0, & z \geq 0, \end{cases} \tag{34}$$

$$\sup_{p\geq 0}[zp - \frac{p^2}{2}] = \begin{cases} 0, & z \leq 0, \\ \frac{z^2}{2}, & z \geq 0. \end{cases} \tag{35}$$

Daraus folgt

$$f^{**}(z) = \begin{cases} \max\left\{\dfrac{z^2}{2} + a,\ -\sqrt{2a}\ z,\ 0\right\} & z \leq -\sqrt{2a}, \\ \max\left\{-\sqrt{2a}\ z,\ -\sqrt{2a}\ z,\ 0\right\} & -\sqrt{2a} \leq z \leq 0, \\ \max\left\{-\sqrt{2a}\ z,\ 0,\ \dfrac{z^2}{2}\right\} & 0 \leq z. \end{cases} \tag{36}$$

Wir finden die zweifach Legendretransformierte von $f(x)$ als

$$f^{**}(z) = \begin{cases} \dfrac{z^2}{2} + a, & z \leq -\sqrt{2a}, \\ -\sqrt{2a}\ z, & -\sqrt{2a} \leq z \leq 0, \\ \dfrac{z^2}{2}, & 0 \leq z, \end{cases} \tag{37}$$

womit $f^{**}(z)$ die konvexe umhüllende Funktion von $f(x)$ ist, vgl. Fig. 3.

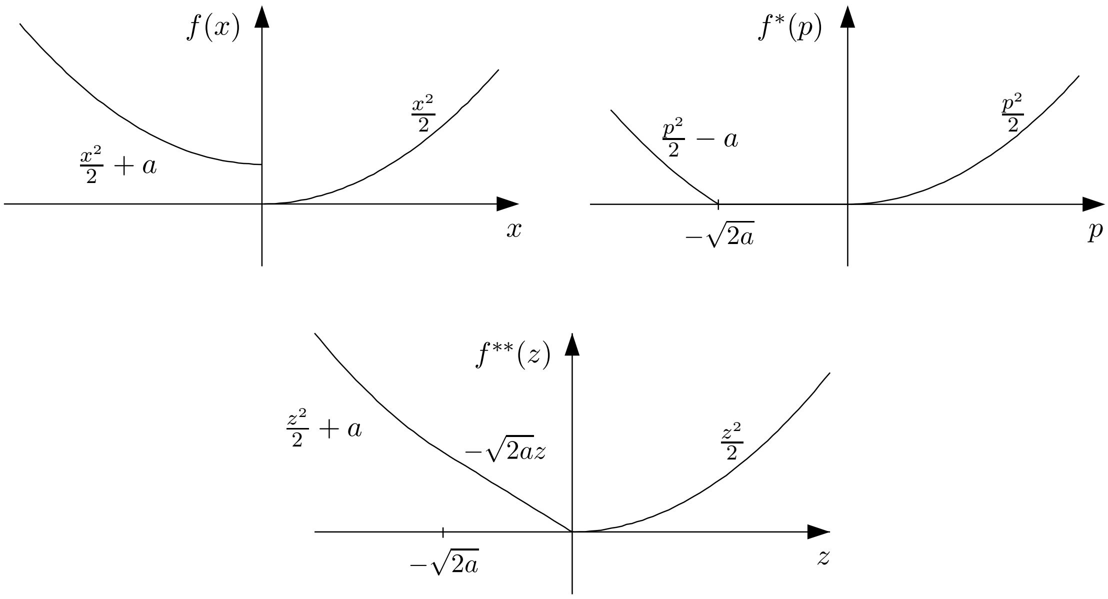

Abbildung 3: Für die nichtkonvexe Funktion $f(x)$ ist die zweimal Legendretransformierte Funktion $f^{**}(z)$ die konvexe Hülle der ursprünglichen Funktion.