Theorie der Wärme
Serie 13

In dieser Übungsserie wollen wir die beiden idealen Modellsysteme, das ideale Gas und den idealen Paramagneten, aus dem Blickwinkel der statistischen Physik untersuchen. Im Gegensatz zur phänomenologischen Beschreibung, analysieren wir ein mikroskopisches Modellsystem und werden damit wiederum die Gesetze der Thermodynamik reproduzieren.

Aufgabe 13.1 Klassische statistische Mechanik und Bohr-van Leeuwen Theorem

Betrachte ein System von N nicht wechselwirkenden Teilchen mit der Ladung e, welche sich im (Kasten-)Potential $U(\mathbf{q})$ befinden. Die zugehörige Hamiltonfunktion ist gegeben durch

$$\mathcal{H} = \sum_{j=1}^{N} \Big[\frac{\boldsymbol{p}_j^2}{2m} + U(\boldsymbol{q}_j) \Big]. \tag{1}$$

a) Finde die kanonische Zustandssumme $Z(T, V, N)$ des Systems und berechne daraus die thermodynamischen Grössen F, U, c_v, p und μ.

b) Nehme an, dass zusätzlich ein zeitunabhängiges Magnetfeld $\boldsymbol{B} = \nabla \wedge \boldsymbol{A}$ wirkt.

   i) Berechne wiederum die Zustandssumme $Z(T, V, N, \boldsymbol{A})$ des Systems.
   Hinweis: Beachte, dass sich der kanonische und der kinetische Impuls bei geladenen Teilchen unterscheiden durch den Term $-e\boldsymbol{A}/c$ ("minimal coupling").

   ii) Wie hängt die freie Energie vom angelegten Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ bzw. vom Vektorpotential $\boldsymbol{A}$ ab? Was kann man daraus für den Magnetismus in der klassischen Mechanik schliessen? *Das Resultat ist unter dem Namen 'Bohr-van Leeuwen Theorem' bekannt.*
   Hinweis: Die Magnetisierung ist gegeben durch $\boldsymbol{M} = \langle -\partial_{\boldsymbol{B}} \mathcal{H} \rangle = k_{\mathrm{B}} T \, \partial_{\boldsymbol{B}} \log Z$.

Aufgabe 13.2 Der Ising Paramagnet

Betrachte N lokalisierte, nicht wechselwirkende magnetische Momente, die jeweils die Werte $s_i = \pm s$ annehmen können. Unter dem Einfluss eines Magnetfeldes H lässt sich die Hamiltonfunktion dieses Systems schreiben als

$$\mathcal{H} = -\sum_{i=1}^{N} H s_i.$$

Ein solches Modell wird *idealer Ising Paramagnet* genannt.

a) Schreibe die kanonische Zustandssumme Z_N für dieses Modell auf.

   Hinweis: Sortiere dabei die Zustände des Systems nach ihrer Gesamtenergie.

   Im Gegensatz zu den Teilchen eines idealen Gases nehmen wir die magnetischen Momente des Ising Modells als unterscheidbar an. Diese Annahme wird dann getroffen, wenn Systeme mit lokalisierten Momenten beschrieben werden sollen.

b) Zeige, dass sich Z_N auch direkt schreiben lässt als die N-te Potenz der Zustandssumme Z_1 für ein isoliertes magnetisches Moment, d.h. $Z_N = (Z_1)^N$.

   Es handelt sich hierbei um ein allgemeines Prinzip, dass sich die Zustandssumme nicht wechselwirkender Systeme faktorisieren lässt.

c) Berechne ausgehend von Z_N die freie Energie $F(T, H)$, die kalorische und die thermische Zustandsgleichung sowie die Wärmekapazität $C(T, H)$ und die magnetische Suszeptibilität $\chi(T, H)$.