Blatt III

Abgabe: 11.10.2012

Aufgabe 1 [*Streuquerschnitt für abstossende Zentralkraft*]: Betrachte die Streuung eines Teilchens der Energie $E > 0$ in einem abstossenden Zentralkraftfeld

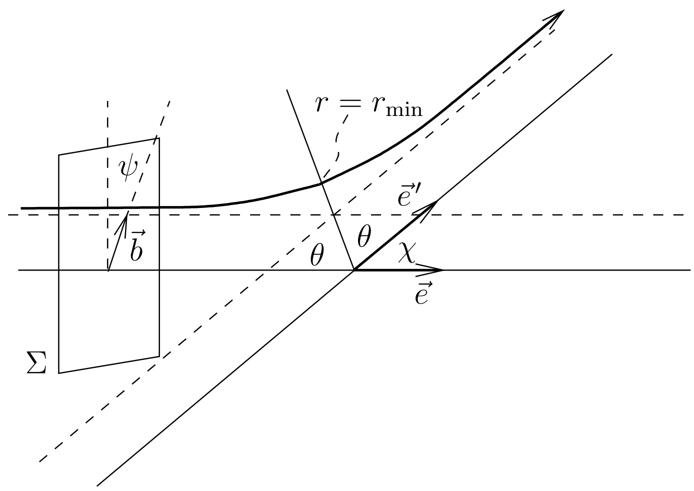
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{C}{r^4}\boldsymbol{x}\,, \tag{1}$$

wobei $C = const$ und $r = |\boldsymbol{x}|$, wie unten abgebildet.

(i) Berechne den Streuwinkel $\chi = \pi - 2\theta$ als Funktion des Stossparameters b.

(ii) Leite daraus den differentiellen Streuquerschnitt her:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{C}{2\pi E}\frac{1-x}{x^2(2-x)^2\sin(\pi x)}\,, \quad (x = \chi/\pi)\,.$$



Hinweise: Kapitel 2.1 im Skript, insbesondere den Abschnitt 2.1.4 über Streubahnen. Nützlich sind auch die folgenden Tatsachen:

(i) $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1-t^{-2}}} = \frac{\pi}{2}$,

(ii) $x(2-x) = 1-(1-x)^2$.

Aufgabe 2 [*Periheldrehung*]: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die gebundenen Bahnen eines Teilchens im Newtonschen Gravitationsfeld durch Ellipsen gegeben sind. Wir diskutieren nun den Effekt eines zusätzlichen Kraftfeldes der Form (1) auf die Bewegung eines Teilchens mit Energie $E < 0$:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\frac{k}{r^3}\boldsymbol{x} + \frac{C}{r^4}\boldsymbol{x}\,,$$

wobei k und C Konstanten sind, und $r = |\boldsymbol{x}|$.

(i) Da das System weiterhin Drehimpuls und Energie erhält, kann es auf ein effektives 1-dimensionales Problem zurückgeführt werden. Bestimme das resultierende 1-dimensional Potential $V(r)$, und zeige, dass es von der Bahngleichung

$$r(\varphi) = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos(\gamma\varphi)} \tag{2}$$

gelöst wird. Bestimme γ als Funktion von C und k. (Für $\gamma = 1$ beschreibt (2) eine Ellipse, die für $\gamma \neq 1$ präzessiert.)

(ii) Die Präzessionsbewegung kann durch die Geschwindigkeit der Periheldrehung charakterisiert werden. (Das Perihel ist der Umkehrpunkt der Bahn, an dem der Abstand zwischen den beiden Körpern minimal ist.) Bestimme diese Geschwindigkeit für $\gamma \simeq 1$. Verwende dabei die dimensionslose Grösse

$$\eta = \frac{C}{ka}\,.$$

Hinweise: Kapitel 2.2 im Skript. (ii) Berechne die Zunahme vom Azimut φ zwischen zwei Periheldurchgängen (eine Periode) und betrachte die Abweichung $\Delta\varphi$ dieser Zunahme von 2π. Um die Periode T zu berechnen, berechne mithilfe von (2) die Fläche F, die während einer Periode vom Ortsvektor überstrichen wird und benutze, dass der Drehimpuls erhalten ist.