Blatt IV

`Abgabe: 18.10.2012`

Aufgabe 1 [*Schwingung um eine Kreisbahn*]: Betrachte eine schwach gestörte Kreisbahn vom Radius $\approx r_0$ im Zentralkraftproblem mit dem Potential $V(r)$. Die Masse sei $m = 1$.

(i) Zeige, dass der Radius mit einer Frequenz ω um seinen Mittelwert r_0 oszilliert

$$\omega = \sqrt{r_0^{-1}\,(3\,V'(r_0) + r_0\,V''(r_0))} \tag{1}$$

Hinweis: Verwende für das effektive Potential $U(r)$ die quadratische Näherung um das Minimum r_0 herum.

(ii) Für welche Potentiale $V(r)$ schliesst sich jede solche gestörte Kreisbahn, falls aufeinander folgende Durchgänge durch r_{max} um (i) $\Delta\phi = 2\pi$, bzw. (ii) $\Delta\phi = \pi$ getrennt sind?

Aufgabe 2 [*Virialsatz und Wasserstoffatom*]: Wir betrachten ein System von N Massepunkten, deren Kräfte einem Potentialgesetz genügen,

$$m_i \frac{d^2\mathbf{x}_i}{dt^2} = -\nabla_i V(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N)\ . \tag{2}$$

(i) Beweise, dass die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2$ die Gleichung

$$2E_{\text{kin}} = \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i\Big) + \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \cdot \nabla_i V \tag{3}$$

erfüllt.

(ii) Betrachte den zeitlichen Mittelwert

$$\bar{E}_{\text{kin}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} dt E_{\text{kin}}(t)\ . \tag{4}$$

Unter der Annahme, dass $\sum_{i=1}^N \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i$ für alle Zeiten beschränkt ist, zeige den Virialsatz, nämlich

$$2\bar{E}_{\text{kin}} = \overline{\sum_{i=1}^N \mathbf{x}_i \cdot \nabla_i V}\ . \tag{5}$$

(iii) Betrachte nun das Zweikörperproblem mit reduzierter Masse μ und Relativpotential

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r}\ , \tag{6}$$

wobei wir zunächst das Keplerproblem behandeln, für das $\kappa = GM_0 m$ ist. Unter Benutzung des 3. Kepler'schen Gesetzes, Gl. (2.2.12) aus dem Skript, sowie des Viralsatzes (der direkt aus (ii) folgt) zeige, dass

$$\oint p_r dr + \oint p_\theta d\theta = \kappa\,\pi\,\sqrt{\frac{-2\,\mu}{E}}\ . \tag{7}$$

Hierbei wird das Integral einmal entlang der geschlossenen Bahn ausgewertet.

Hinweise:

(1) Benutze Teil (ii) um für dieses Potential den eigentlichen Viralsatz abzuleiten, nämlich

$$\bar{E}_{\rm kin} = -\frac{1}{2}\bar{E}_{\rm pot} \ . \tag{8}$$

(2) Beobachte, dass

$$\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x} = \oint p_r dr + \oint p_\theta d\theta \ . \tag{9}$$

(3) Benutze die Ellipserelationen aus dem Skript, um zu zeigen, dass $a = -\frac{GMm}{2\,E}$.

(iv) Gemäss der Sommerfeld'schen Quantisierungsbedingung sind die Integrale

$$\oint p_r dr = n_r\, h \ , \qquad \oint p_\theta d\theta = n_\theta\, h \tag{10}$$

quantisiert, wobei h das Plank'sche Wirkungsquant ist, und n_r, n_θ positive ganze Zahlen sind. Im Fall des Wasserstoffatoms ist $\kappa = e^2$, und daher findet man für das Energiespektrum des Wasserstoffatoms

$$E = -\frac{m_e\, e^4}{2\hbar^2\, (n_r + n_\theta)^2} \ , \tag{11}$$

wobei $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.