Blatt VII

Abgabe: 08.11.2012

Aufgabe 1 [*Einfache Systeme*]: Finde die Lagrange Funktion und die dazu gehörigen Bewegungsgleichungen für folgende Systeme

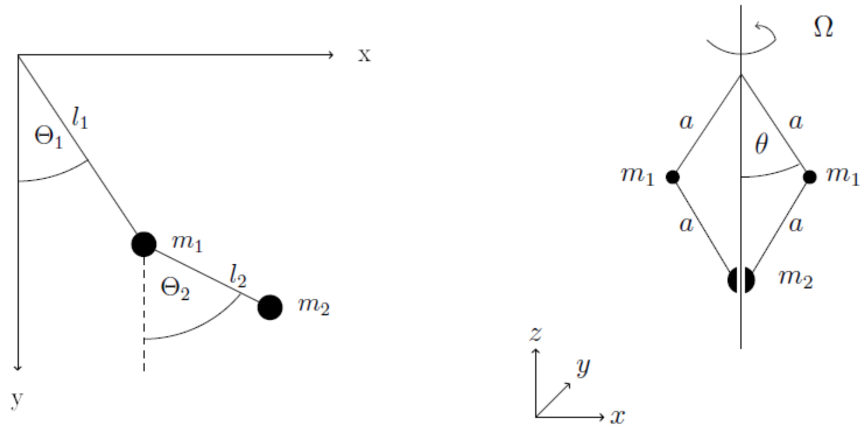

Abbildung 1: Doppelpendel und Fliehkraftregler

(1) **das Doppelpendel in der Ebene**

Hinweis: Benutze die trigonometrische Eigenschaft

$$\cos\phi_1 \cos\phi_2 + \sin\phi_1 \sin\phi_2 = \cos(\phi_1 - \phi_2).$$

(2) **den Fliehkraftregler:** Für diesen Fall bestimme ausserdem die Gleichgewichtslösungen ($\theta = \text{const}$) und untersuche sie auf ihre Stabilität.

Der Fliehkraftregler besteht aus zwei masselosen Stangen der Länge a, die an einer Achse befestigt sind, welche sich mit Winkelgeschwindigkeit Ω dreht. Am Ende der Stangen befinden sich zwei identische Massen m_1. Diese sind mit zwei weiteren gelenkigen und masselosen Stangen der Länge a verbunden. An ihren Enden sitzt ein Reiter der Masse m_2, welcher sich reibungsfrei entlang der z-Achse bewegen kann.

Aufgabe 2 [*Fallender Stab*]: Ein Stab rutsche reibungsfrei an einer Wand herunter, wobei er zu Beginn aufrecht steht und dann langsam zu rutschen beginnt. Bestimme den Winkel Φ bei dem sich das obere Ende von der Wand löst.

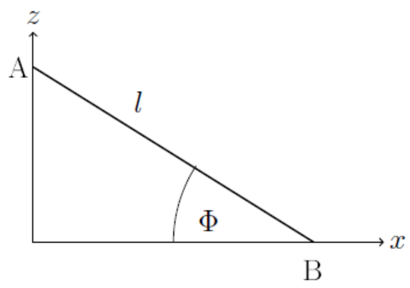

Abbildung 2: Fallender Stab dessen Enden (noch) an der Wand und am Boden anliegen.

Hinweise:

(i) Die Bewegung setzt sich aus einer Schwerpunktsbewegung und einer Rotation zusammen. Das Trägheitsmoment (bezüglich des Massenmittelpunkts) des Stabes ist $\Theta = ml^2/12$, und der rotatorische Anteil an der kinetischen Energie beträgt $\Theta\dot{\Phi}^2/2$.

(ii) Betrachte zuerst den Fall, wo A und B reibungsfrei an die z- und x-Achse gebunden sind. Stelle die Bewegungsgleichung für Φ in diesem Fall auf.

(iii) Die Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung $2\ddot{x} + \cos(x) = 0$ genügt der Beziehung (c ist durch Anfangsbedingungen bestimmt)

$$\dot{x}^2 = c - \sin(x) \ .$$

(iv) Betrachte die Zwangkräfte auf A.

Aufgabe 3 [*Separierbare Probleme*]: Wir betrachten ein System, für das die kinetische und potentielle Energie als Funktion der verallgemeinerten Koordinaten die Form

$$T = \sum_i f_i(q_i)\dot{q}_i^2 \qquad\qquad V = \sum_i V_i(q_i)$$

annimmt. Zeige, dass die Lagrange'schen Gleichungen sich nach den einzelnen verallgemeinerten Koordinaten separieren lassen, und dass das Problem auf Quadraturen (d.h. Integrale) zurückgeführt werden kann.

Hinweis: Zeige dass neben $E = T + V$ auch die Energie $E_i = f_i(q_i)\dot{q}_i^2 + V_i(q_i)$ jeder einzelnen Koordinate erhalten ist.