# Blatt VIII

Abgabe: 15.11.2012

**Aufgabe 1** [*Legendretransformation*]: Die Hamiltonfunktion eines Systems von $f$ Freiheitsgraden sei $H(x_i, p_i)$, $i = 1, \ldots, f$.

(i) Berechne die Lagrangefunktion $L$ des Systems. Von welchen Variablen hängt $L$ ab?

(ii) Wende die Rechnung aus Teil (i) auf ein relativistisches Teilchen mit Ladung $e$ in einem konstanten elektrischen Feld $\mathbf{E}$ an, wobei

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = c\sqrt{(mc)^2 + \mathbf{p}^2} + e\mathbf{E} \cdot \mathbf{x} \ .$$

Bestimme zudem die Bewegungsgleichungen?

**Aufgabe 2** [*Poisson Klammer*]: Auf dem Raum der Funktionen des Phasenraums ist die Poissonklammer durch

$$\{F, G\} = \sum_{\alpha=1}^{f} \left( \frac{\partial F}{\partial q^\alpha} \frac{\partial G}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial p_\alpha} \frac{\partial G}{\partial q^\alpha} \right) \tag{1}$$

definiert.

(i) Zeige, dass die Poissonklammer die Jacobi-Identität erfüllt,

$$\{F_1, \{F_2, F_3\}\} + \{F_2, \{F_3, F_1\}\} + \{F_3, \{F_1, F_2\}\} = 0. \tag{2}$$

(ii) Für ein autonomes System für welches die Hamiltonfunktion nicht explizit von der Zeit abhängt folgt aus den Hamilton'schen Bewegungsgleichungen

$$\frac{d}{dt} F(q(t), p(t)) = \{F, H\}. \tag{3}$$

Zeige, dass für Erhaltungsgrössen $F$ und $G$, auch deren Poissonklammer $\{F, G\}$ eine Erhaltungsgrösse ist.

(iii) Der Drehimpuls $\mathbf{L}$ ist durch $\mathbf{L} = \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}$ definiert. Falls $\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_1$ und $\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_2$ erhalten sind [für ein Orthogonalsystem ($\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$)], dann ist auch $\mathbf{L} \cdot \mathbf{e}_3$ erhalten. Beweise diese Aussage.

*Hinweis:* Berechne die Poissonklammer der beiden Erhaltungsgrössen.

**Aufgabe 3** [*Phasenraum*]: Bewegungsabläufe von Systemen welche durch gekoppelter Gleichungen bestimmt werden, sind im Allgemeinen komplex. Eine Phasenraumanalyse in der Nähe von Extremalpunkten erlaubt jedoch oft ein qualitatives Verständnis der Abläufe. Im folgenden Beispiel betrachten wir einen See mit zwei Arten von Fischen. Die Art A lebt von Algen, von denen es genug gibt; B ist ein Raubfisch und lebt nur von A. Die Bevölkerungszahl von A sei $x(t)$, jene von B $y(t)$.

(i) Interpretiere die Differentialgleichung für die Bevölkerungsentwicklung

$$\frac{dx}{dt} = ax - cxy, \qquad\qquad \frac{dy}{dt} = -by + fxy,$$

wobei $a$, $b$, $c$ und $f$ positive Konstanten sind.

(ii) Untersuche das Phasendiagramm, durch eliminieren der Zeitabhängigkeit. Integriere die resultierende Differentialgleichung 1. Ordnung.

(iii) Untersuche weiter die Bahn in der Nähe aller Fixpunkte $dx/dt = 0$, $dy/dt = 0$ und skizziere die allgemeine Struktur der Bahnkurven.

*Hinweis:* In der Nähe eines Fixpunktes kann man die Gleichungen linearisieren. Dazu betrachte kleine Abweichungen vom Fixpunkt und vernachlässige Terme höherer Ordnung.