Allgemeine Mechanik
Übungsblatt 3.

HS 2013
Prof. R. Renner

Übung 1. ***Keplergesetze und Newtonsche Gravitation***

In der Vorlesung wurden die Keplergesetze der Planetenbewegung aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz hergeleitet. Hier soll der umgekehrte Weg beschritten werden: Leite das Newtonsche Gravitationsgesetz aus den drei Keplerschen Gesetzen her! Benutze dabei zunächst die beiden ersten Keplergesetze um zu zeigen, dass es sich bei der Gravitationskraft um eine Zentralkraft handelt und dass die Bahn eines Planeten

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\alpha \frac{\boldsymbol{x}}{r^3} \tag{1}$$

erfüllt, wobei α eine positive Konstante ist und $r = |\boldsymbol{x}|$. Zur Erinnerung sind die Keplergesetze hier nochmals erwähnt (Bezeichnungen wie in der Vorlesung):

- Die Planetenbahnen sind (ebene) Ellipsen mit Exzentrizität ε, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht:

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\phi}, \text{ wobei } a \text{ die grosse Halbachse ist.} \tag{2}$$

- Der Verbindungsvektor von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen:

$$r^2\dot{\phi} = C_1 = \text{konst.} \tag{3}$$

- Für alle Planeten verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten wie die Kuben der grossen Halbachsen:

$$\frac{T^2}{a^3} = C_2 = \text{konst.} \tag{4}$$

Übung 2. ***Periheldrehung***

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die gebundenen Bahnen eines Teilchens im Newtonschen Gravitationsfeld durch Ellipsen gegeben sind. Wir diskutieren nun den Effekt eines zusätzlichen Kraftfeldes der Form $C\boldsymbol{x}/r^4$ auf die Bewegung eines Teilchens mit Energie $E < 0$. Das gesamte Kraftfeld ist dann

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\frac{k}{r^3}\boldsymbol{x} + \frac{C}{r^4}\boldsymbol{x}\,, \tag{5}$$

wobei k und C Konstanten sind, und $r = |\boldsymbol{x}|$.

(i) Da das System weiterhin Drehimpuls und Energie erhält, kann es auf ein effektives 1-dimensionales Problem zurückgeführt werden. Bestimme das resultierende 1-dimensionale Potential $V(r)$, und zeige, dass es von der Bahngleichung

$$r(\varphi) = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos(\gamma\varphi)} \tag{6}$$

gelöst wird. Bestimme γ als Funktion von C und k. (Für $\gamma = 1$ beschreibt (6) eine Ellipse, die für $\gamma \neq 1$ präzessiert.)

(ii) Die Präzessionsbewegung kann durch die Geschwindigkeit der Periheldrehung charakterisiert werden. (Das Perihel ist der Umkehrpunkt der Bahn, an dem der Abstand zwischen den beiden Körpern minimal ist.) Bestimme diese Geschwindigkeit für $\gamma \simeq 1$. Verwende dabei die dimensionslose Grösse

$$\eta = \frac{C}{ka}\,.$$

Hinweise: Kapitel 2.2 im Skript. (ii) Berechne die Zunahme vom Azimut φ zwischen zwei Periheldurchgängen (eine Periode) und betrachte die Abweichung $\Delta\varphi$ dieser Zunahme von 2π. Um die Periode T zu berechnen, berechne mithilfe von (6) die Fläche F, die während einer Periode vom Ortsvektor überstrichen wird und benutze, dass der Drehimpuls erhalten ist.