## Übung 1. ***Streuquerschnitt für abstossende Zentralkraft***

Betrachte die Streuung eines Teilchens der Energie $E > 0$ in einem abstossenden Zentralkraftfeld

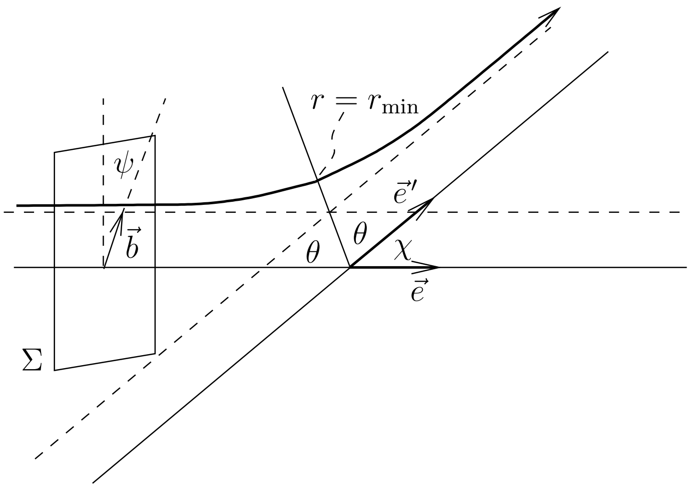
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \frac{C}{r^4}\boldsymbol{x}\,, \tag{1}$$

wobei $C = const$ und $r = |\boldsymbol{x}|$, wie unten abgebildet.

(i) Berechne den Streuwinkel $\chi = \pi - 2\theta$ als Funktion des Stossparameters $b$.

(ii) Leite daraus den differentiellen Streuquerschnitt her:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\Omega} = \frac{C}{2\pi E}\frac{1-x}{x^2(2-x)^2\sin(\pi x)}\,, \quad (x = \chi/\pi)\,.$$




*Hinweise: Siehe Kapitel 2.1 im Skript, insbesondere den Abschnitt 2.1.4 über Streubahnen. Nützlich sind auch die folgenden Tatsachen:*

*(i)* $\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{t^2\sqrt{1-t^{-2}}} = \frac{\pi}{2}$,

*(ii)* $x(2-x) = 1-(1-x)^2$.

## Übung 2. ***Virialsatz und Wasserstoffatom***

Wir betrachten ein System von $N$ Massepunkten, deren Kräfte einem Potentialgesetz genügen,

$$m_i\frac{d^2\mathbf{x}_i}{dt^2} = -\nabla_i V(\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_N)\,. \tag{2}$$

Wir wollen in dieser Aufgabe den Virialsatz beweisen, der einen Zusammenhang zwischen dem zeitlichen Mittelwert der kinetischen Energie der Teilchen und dem Kraftfeld herstellt. Dieser besagt, dass, sofern alle $\mathbf{x}_i$ und $\dot{\mathbf{x}}_i$ im Verlauf der Zeit endlich bleiben,

$$2\bar{E}_{\text{kin}} = -\overline{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{x}_i} \tag{3}$$

gilt, beziehungsweise für ein System mit Potentialgesetz wie oben:

$$2\bar{E}_{\text{kin}} = \overline{\sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i \cdot \nabla_i V}, \tag{4}$$

wobei der zeitliche Mittelwert definiert ist durch

$$\bar{E}_{\text{kin}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt E_{\text{kin}}(t) \ . \tag{5}$$

Gehe dazu wie folgt vor:

(i) Beweise, dass die kinetische Energie $E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2$ die Gleichung

$$2E_{\text{kin}} = \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i\Big) + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{x}_i \cdot \nabla_i V \tag{6}$$

erfüllt.

(ii) Zeige den Virialsatz (4) unter der Annahme, dass $\sum_{i=1}^{N} \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{x}_i$ für alle Zeiten beschränkt ist.

(iii) Betrachte nun das Zweikörperproblem mit reduzierter Masse $\mu$ und Relativpotential

$$V(r) = -\frac{\kappa}{r} \ , \tag{7}$$

wobei wir zunächst das Keplerproblem behandeln, für das $\kappa = GM_0 m$ ist. Unter Benutzung des 3. Kepler'schen Gesetzes, Gl. (2.2.12) aus dem Skript, sowie des Viralsatzes (der direkt aus (ii) folgt) zeige, dass

$$\oint p_r dr + \oint p_\theta d\theta = \kappa\, \pi \sqrt{\frac{-2\,\mu}{E}} \ . \tag{8}$$

Hierbei wird das Integral einmal entlang der geschlossenen Bahn ausgewertet.

**Hinweise:**

(1) Benutze Teil (ii) um für dieses Potential den eigentlichen Virialsatz abzuleiten, nämlich

$$\bar{E}_{\text{kin}} = -\frac{1}{2}\bar{E}_{\text{pot}} \ . \tag{9}$$

(2) Beobachte, dass

$$\oint \mathbf{p} \cdot d\mathbf{x} = \oint p_r dr + \oint p_\theta d\theta \ .$$

(3) Benutze die Ellipserelationen aus dem Skript, um zu zeigen, dass $a = -\frac{GMm}{2E}$.

(iv) Gemäss der Sommerfeld'schen Quantisierungsbedingung sind die Integrale

$$\oint p_r dr = n_r \, h \ , \qquad \oint p_\theta d\theta = n_\theta \, h \tag{10}$$

quantisiert, wobei $h$ das Plank'sche Wirkungsquant ist, und $n_r, n_\theta$ positive ganze Zahlen sind. Im Fall des Wasserstoffatoms ist $\kappa = e^2$. Zeige damit für das Energiespektrum des Wasserstoffatoms

$$E = -\frac{m_e \, e^4}{2\hbar^2 \, (n_r + n_\theta)^2} \ , \tag{11}$$

wobei $\hbar = \frac{h}{2\pi}$.

## Übung 3. *Gravitationskraft ausgedehnter Körper*

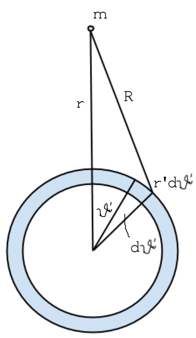



Abbildung 1: Skizze zur Masseverteilung

Zeige, dass die von einem sphärisch symmetrischen Körper mit Gesamtmasse M ausgehende Gravitationskraft auf einen Massepunkt $m$ (der sich ausserhalb des Körpers befindet[1]) gleich ist wie die einer Punktmasse M im Zentrum des Körpers.

[1]Masse, die sich sphärisch symmetrisch verteilt weiter weg vom Zentrum als der Massepunkt $m$ befindet, hebt sich in ihrer Wirkung auf $m$ gegenseitig auf — dies kann mit einer ähnlichen Rechnung gezeigt werden.