Übung 1. *Gekoppelte Pendel*

Wir betrachten ein System aus zwei gleichen mathematischen Pendeln der Länge $l_1 = l_2 = l$ mit Massen $m_1 = m_2 = m$ im Schwerefeld mit Erdbeschleunigung g. Die Pendel bewegen sich beide in einer Ebene, und der Auslenkungswinkel der Pendel relativ zur Vertikalen wird mit q_1 und q_2 (kleine Auslenkungen!) bezeichnet. Weiterhin sind die Pendel durch eine masselose Feder gekoppelt, deren Länge gleich dem Abstand der Aufhängepunkte ist. Definiere $\omega_g^2 = g/l$ und $\omega_f^2 = f/m$.

(i) Bestimme die beiden Eigenschwingungen des Systems.

(ii) Zur Zeit $t = 0$ seien die Pendel in Ruhe. Dann wird eines der beiden Pendel mit der Geschwindigkeit $\dot{q}_1 = v$ angestossen. Zeige, dass sich das erste Pendel nach einer gewissen Zeit T, die bestimmt werden soll, beinahe in Ruhe befindet, und dass alle Energie zum zweiten übergegangen ist.

Hinweis: (i) Zeige, dass die Federkraft auf Masse m_1 für kleine Auslenkungen $-f(q_1 - q_2)$ ist. (ii) Hier soll man annehmen, dass die Federkonstante f klein ist, und die trigonometrische Identität $\sin(a) + \sin(b) = 2\cos(\frac{a-b}{2})\sin(\frac{a+b}{2})$ *benutzen.*

Übung 2. *Gekoppelte Federn*

Wir betrachten ein System von N identischen Teilchen der Massen m mit Koordinaten $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)^T$, die auf einem Ring angeordnet sind (siehe Abbildung 1). Die Teilchen sind über Federn der Federkonstante f miteinander gekoppelt, wobei wir annehmen, dass die Federkräfte auf jedes Teilchen genau entlang der Tangentialen wirken.

(i) Finde die Bewegungsgleichungen für $\mathbf{x}$ in der Form $\ddot{\mathbf{x}} = cA\mathbf{x}$, wobei $c \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist.

(ii) Das System hat eine zyklische Symmetrie:

$$S : (x_1, x_1, \ldots, x_N) \to (x_2, x_3, \ldots, x_N, x_1). \tag{1}$$

Finde die Matrixdarstellung für S und diagonalisiere diese, d.h. finde Eigenvektoren $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^N$ und Eigenwerte $\lambda_k \in \mathbb{C}$, so dass

$$S\mathbf{e}_k = \lambda_k \mathbf{e}_k \tag{2}$$

erfüllt ist.

(iii) Warum lassen sich die Bewegungsgleichungen nun deutlich vereinfachen?

(iv) Verwende die Entwicklung $\mathbf{x}(t) = \sum_k u_k(t)\mathbf{e}_k$ und zeige, dass

$$\ddot{u}_k = -\omega_k^2 u_k. \tag{3}$$

Finde die ω_k. Was bedeuten diese?

(v) Beschreibe die Lösungen, die $\lambda_k = \pm 1$ entsprechen.

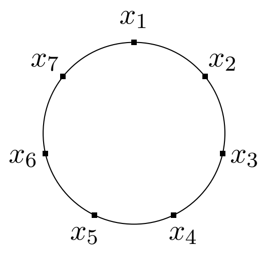

Abbildung 1: Anordnung von 7 identischen Teilchen auf einem Ring.

Übung 3. ***Phasenportrait gedämpfter Schwingungen***

Wir betrachten einen gedämpften Oszillator,

$$m\ddot{x} = -fx - r\dot{x}. \tag{4}$$

(i) Zeichne das Phasenportrait in der $(x, \dot{x})$-Ebene für die Anfangsbedingung $x(0) = 1$, $\dot{x}(0) \in \{0, 1, -1, -2\}$ in den 4 Fällen, wie im Skript, wenn die Dämpfung eine der folgenden ist:

1. $\beta = 0, \alpha \neq 0$
2. $0 < \beta < \alpha$
3. $\beta = \alpha$
4. $\beta > \alpha$

Hier $\beta = \frac{r}{2m}, \alpha = \sqrt{\frac{f}{m}}$. Die Abbildung sollte mit dem Computer angefertigt werden, beispielsweise mit `Matlab`, `Mathematica` oder `Python/Matplotlib`.

(ii) Beschreibe das Verhalten des Systems anhand der Phasenportraits.