Allgemeine Mechanik
Musterlösung 12.

Übung 1. *Hamilton-Jacobi Gleichungen*

Ein geladenes Teilchen bewegt sich in der Ebene unter dem Einfluss eines zentralen Potentials $k\, r^2/2$ und eines konstanten magnetischen Feldes $\vec{B}$ senkrecht zur Ebene, so dass das Vektorpotential $\vec{A}$ gegeben ist durch

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{x}. \tag{1}$$

(i) Berechne den Lagrangian von diesem System in polaren Koordinaten.

(ii) Berechne die kanonischen Impulse p_r und p_θ und finde den Hamiltonian.

(iii) Stelle die zeitabhängige Hamilton-Jacobi Gleichungen auf. Benutze dazu die zeitabhängige Funktion $S = S(q, P, t)$ wie im Skript in Kapitel 7.3 erklärt.

Lösung.

(i) Der Lagrangian für dieses System ist in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} L &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{q}{c}\left(\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}\right) - \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2\right) \\ &= \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) + \frac{qB}{2c}\left(x\dot{y} - y\dot{x}\right) - \frac{k}{2}\left(x^2 + y^2\right). \end{aligned} \tag{L.1}$$

Transformiert in Polarkoordinaten ist das

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{qB}{2c}\left(r^2\dot{\theta}\right) - \frac{k}{2}r^2 \tag{L.2}$$

(ii) Die kanonischen Impulse p_θ und p_r sind

$$\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mr^2\dot{\theta} + \frac{qB}{2c}r^2. \end{aligned} \tag{L.3}$$

Der Hamiltonian ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned} H &= p_r\dot{r} + p_\theta\dot{\theta} - L \\ &= \frac{1}{2m}p_r^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(p_\theta - \frac{qB}{2c}r^2\right)^2 + \frac{k}{2}r^2. \end{aligned} \tag{L.4}$$

(iii) Um die Hamilton-Jacobi Gleichungen zu bekommen, nehmen wir an, dass

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} \quad \text{and} \quad p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta}. \tag{L.5}$$

Eingesetzt in den Hamiltonian kriegt man dann eine partielle Differentialgleichung in den Koordinaten θ, r und t – die zeitabhängige Hamilton-Jacobi Gleichung (vgl. Gl. (7.3.1) im Skript):

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta} - \frac{qB}{2c}r^2\right)^2 + \frac{k}{2}r^2 = -\frac{\partial S}{\partial t}. \tag{L.6}$$

Das Problem erlaubt eine Separation der Variablen

$$S(r,\theta,t) = R(r) + \Theta(\theta) + T(t). \tag{L.7}$$

Das führt zu den Gleichungen

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -P_2, \tag{L.8}$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \theta} = P_1, \tag{L.9}$$

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\partial R}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2mr^2}\left(P_1 - \omega_0 r^2\right)^2 + \frac{k}{2}r^2 = P_2, \tag{L.10}$$

wobei wir $\omega_0 = \frac{qB}{2c}$ schreiben und P_1 und P_2 Konstanten der Bahn sind (und zugleich die kanonisch konjugierten Impulse der neuen Koordinaten). Die letzte partielle Differentialgleichung kann man implizit lösen durch das Integral

$$R(r; P_1, P_2) = \int^r dy \sqrt{2m\left(P_2 - \frac{k}{2}y^2\right) - \frac{1}{y^2}\left(P_1 - \omega_0 y^2\right)^2}. \tag{L.11}$$

Also können wir S schreiben als

$$S(r,\theta,t;P_1,P_2) = R(r;P_1,P_2) + P_1\theta - P_2 t. \tag{L.12}$$

Somit sind die impliziten zeitabhängigen Lösungen für r und θ gegeben durch

$$\gamma_1 = \frac{\partial S}{\partial P_1} = \theta - \int^r dy \frac{P_1 - \omega_0 y^2}{y^2\sqrt{2m\left(P_2 - \frac{k}{2}y^2\right) - \frac{1}{y^2}(P_1 - \omega_0 y^2)^2}}, \tag{L.13}$$

$$\gamma_2 = \frac{\partial S}{\partial P_2} = \int^r dy \frac{m}{\sqrt{2m\left(P_2 - \frac{k}{2}y^2\right) - \frac{1}{y^2}(P_1 - \omega_0 y^2)^2}} - t, \tag{L.14}$$

wobei γ_i, P_1, P_2 Konstanten der Bahn sind, welche durch die Anfangsbedingungen gegeben sind.

Übung 2. *Eiegenschaften des Trägheitstensors*

Der Trägheitstensor eines starren Körpers bezüglich des Punktes $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ist definiert als

$$\Theta^{\boldsymbol{x}}_{jk} = \int \mathrm{d}m(\boldsymbol{y})[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})^2\delta_{jk} - (x_j - y_j)(x_k - y_k)] \quad (j,k = 1,2,3)\,, \tag{2}$$

wobei $m(\boldsymbol{y})$ die Massenverteilung des Körpers ist, und δ_{jk} das Kronecker-Delta beschreibt.

(i) Sei nun der Trägheitstensor $\Theta^{\boldsymbol{0}}_{jk}$ eines starren Körpers bezüglich des Schwerpunktes $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ bekannt. Zeige den Steinerschen Satz

$$\Theta^{\boldsymbol{a}}_{jk} = \Theta^{\boldsymbol{0}}_{jk} + M(\boldsymbol{a}^2\delta_{jk} - a_j a_k) \quad (j,k = 1,2,3)\,, \tag{3}$$

wobei $\Theta^{\boldsymbol{a}}_{jk}$ der Trägheitstensor bezüglich des Punktes $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ist und $M = \int \mathrm{d}m(\boldsymbol{y})$ die Gesamtmasse des Körpers bezeichnet.

Hinweis: Benutze die Definition des Schwerpunktes.

(ii) Zeige, dass die Diagonaleinträge des Trägheitstensors unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems stets der folgenden Gleichung genügen:

$$\Theta_{11} + \Theta_{22} \geq \Theta_{33}\,, \tag{4}$$

und analog bei beliebiger Vertauschung der Indizes. Wann gilt Gleichheit, d.h. $\Theta_{11} + \Theta_{22} = \Theta_{33}$?

Lösung.

1. Wir nehmen den Schwerpunkt als Ursprung unseres Koordinatensystems, d.h. $\int \mathrm{d}m(\boldsymbol{y})\boldsymbol{y} = 0$. Nach Definition des Trägheitstensors bezüglich des Punktes $\boldsymbol{a}$ gilt dann:

$$\Theta^{\boldsymbol{a}}_{jk} = \int \mathrm{d}m(\boldsymbol{y})[(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{y})^2\delta_{jk} - (a_j - y_j)(a_k - y_k)] \tag{L.15}$$

$$= \int \mathrm{d}m(\boldsymbol{y})[\boldsymbol{y}^2\delta_{jk} - y_j y_k] + (\boldsymbol{a}^2\delta_{jk} - a_j a_k)\int \mathrm{d}m(\boldsymbol{y}) \tag{L.16}$$

$$+ \int \mathrm{d}m(\boldsymbol{y})(-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{y} + a_j y_k + a_k y_j) \tag{L.17}$$

$$= \Theta^{\boldsymbol{0}}_{jk} + M(\boldsymbol{a}^2\delta_{jk} - a_j a_k)\,. \tag{L.18}$$

Die letzte Gleichung folgt aus der Definition des Trägheitstensors und der Eigenschaft unseres Koordinatensystems: $\int \mathrm{d}m(\boldsymbol{y})y_i = 0$.

2. Betrachte o.B.d.A. den Trägheitstensor bezüglich des Ursprungs unseres Koordinatensystems. Es gilt dann:

$$\Theta_{ii} = \int \mathrm{d}m(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}^2 - (y_i)^2) \quad (i = 1,2,3)\,. \tag{L.19}$$

Also z.B.

$$\Theta_{11} + \Theta_{22} = \int \mathrm{d}m(\boldsymbol{y})(2\boldsymbol{y}^2 - (y_1)^2 - (y_2)^2) = \int \mathrm{d}m(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}^2 + (y_3)^2) \tag{L.20}$$

$$\geq \int \mathrm{d}m(\boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}^2 - (y_3)^2) = \Theta_{33}\,, \tag{L.21}$$

und analog bei beliebiger Vertauschung der Indizes. Die zweite Gleichung folgt aus $\boldsymbol{y}^2 = (y_1)^2 + (y_2)^2 + (y_3)^2$. Gleichheit gilt genau dann, wenn $\int \mathrm{d}m(\boldsymbol{y})(y_3)^2 = 0$, d.h. wenn die Gesamtmasse des Körpers auf $y_3 = 0$ konzentriert ist, also für ebene, unendlich dünne Objekte.

Übung 3. *Der schlafende Kreisel*

Wir betrachten eine spezielle Lösung eines schweren symmetrischen Kreisels, nämlich die Lösung wo $\theta(t) = 0 = \text{const.}$ und $\dot{\psi}(t) = \text{const.}$ Das entspricht der Konfiguration, in der der Kreisel mit konstanter Winkelgeschwindigkeit um seine Figurenachse rotierend aufrecht steht. Im Folgenden verwenden wir die gleiche Notation und die gleichen Konventionen wie im Kapitel 8.4 im Skript, insbesondere sind (ϕ, θ, ψ) die Eulerschen Winkel des starren Körpers (siehe Abb. 1). Damit beschreibt ϕ die Präzession, θ die Nutation und ψ die Rotation um die Figurenachse des Kreisels.

(i) Verifiziere, dass es sich bei der gegebenen Konfiguration tatsächlich um eine Lösung der Bewegungsgleichungen handelt. Benutze dazu die relevanten Gleichungen aus dem Skript.

Hinweis: Was ist die Rolle von ϕ resp. $\dot{\phi}$ in diesem speziellen Fall? Abb. 1 könnte hilfreich sein.

(ii) Diese Lösung hat nur dann physikalische Bedeutung, wenn sie gegenüber kleinen Störungen von aussen stabil ist (d.h. "wenn der schlafende Kreisel durch kleine Störungen nicht aufwacht"). Zeige, dass dies für $\omega > \omega_0$ der Fall ist, wobei ω die anfängliche Winkelgeschwindigkeit der Kerisels in seine 3-Richtung ist, und finde ω_0. Wie kann man damit die in der Realität auftretende Bewegung eines Kreisels erklären?

Hinweis: Eintwickle Gl. (8.4.13) im Skript für kleine θ und leite daraus eine Differentialgleichung her, mit welcher du die Frage nach der Stabilität beantworten kannst. Was ist die Relation zwischen M_z und M_3 für $\theta = 0$? Beachte, dass hier M_z und M_3 Drehimpulse und nicht Drehmomente sind.

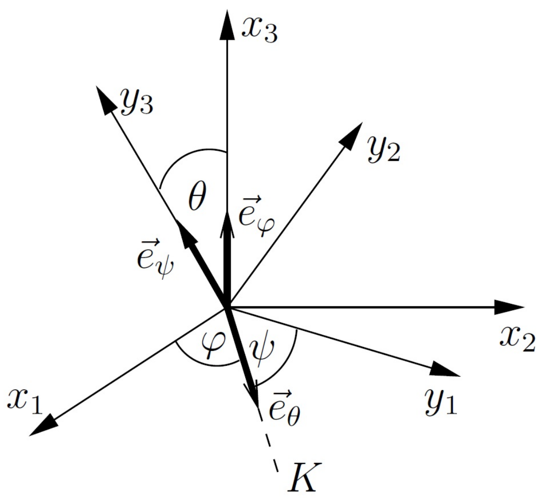

Abbildung 1: Laborsystem (x_1, x_2, x_3) und körperfestes System (y_1, y_2, y_3) mit den Eulerwinkeln (ϕ, θ, ψ).

Lösung.

(i) Da es sich um einen symetrischen Kreisel handelt, muss der Schwerpunkt auf der Symmetrieachse liegen. Im Körperfesten System können wir ihm daher die Koordinaten $(0, 0, l)$ mit $l > 0$ zuordnen, wobei der Nullpunkt des körperfesten Systems für alle Zeiten mit dem Nullpunkt des Laborsystem übereinstimmen soll. Wie im Skript hergeleitet ist dann die kinetische und die potentielle Energie gegeben durch

$$T = \frac{\Theta_1}{2}\left(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right) + \frac{\Theta_3}{2}\left(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta\right)^2, \tag{L.22}$$

$$V = mgl\cos\theta, \tag{L.23}$$

wobei m die Masse und $\Theta_1, \Theta_2 = \Theta_1, \Theta_3$ die Hauptträgheitsmoment des Kreisels sind. Da die Lagrangefunktion $L = T - V$ weder von ϕ, ψ noch direkt von t abhängt, bekommen wir drei

Erhaltungsgrössen:

$$
\begin{aligned}
T+V &=: E, && \text{(L.24)}\\
\frac{\partial L}{\partial \dot\phi} &= \dot\phi\Theta_1\sin^2\theta + (\dot\psi+\dot\phi\cos\theta)\Theta_3\cos\theta =: M_z, && \text{(L.25)}\\
\frac{\partial L}{\partial \dot\psi} &= (\dot\psi+\dot\phi\cos\theta)\Theta_3 =: M_3. && \text{(L.26)}
\end{aligned}
$$

Da es sich dabei um drei linear unabhängige Gleichungen handelt, können wir in diesem Fall statt den Euler-Lagrange Gleichungen direkt Gl. L.24, L.25 und L.26 benutzen.

Dem Hinweis folgend finden wir, dass im Falle von $\theta = 0$ die Eulerwinkel ϕ und ψ die gleiche Bedeutung haben. Es reicht hier also, nur ψ zu betrachten, und $\phi \equiv 0$ zu setzen. Damit ist auch $\dot\phi = 0$. Einsetzen der Konfiguration $\theta \equiv 0$, $\dot\psi \equiv$ const. in die obigen drei Gleichungen zeigt dann sofort, dass wir es mit einer Lösung der Bewegungsgleichungen zu tun haben.

(ii) Wie im Skript gezeigt können wir die Bewegungsgleichungen zu einer Differentialgleichung 1. Ordnung für die Nutationsbewegung $\theta(t)$ vereinfachen. Sie lautet

$$
E' \equiv E - \frac{M_3^2}{2\Theta_3} = \frac{\Theta_1}{2}\dot\theta^2 + \frac{(M_z - M_3\cos\theta)^2}{2\Theta_1\sin^2\theta} + mgl\cos\theta, \tag{L.27}
$$

wobei ϕ und ψ danach durch

$$
\dot\psi + \dot\phi\cos\theta = \frac{M_3}{\Theta_3} \quad \text{und} \quad \dot\phi = \frac{M_z - M_3\cos\theta}{\Theta_1\sin^2\theta} \tag{L.28}
$$

berechnet werden können. Im Folgenden nehmen wir an, dass θ klein ist, d.h. wir haben eine kleine Störung des schlafenden Kreisels. Für $\theta = 0$ ist das körperfeste System gegenüber dem Laborsystem nicht gekippt. Deshalb sind in diesem Fall die 3-Komponenten aller vektoriellen Grössen in beiden Koordinatensystemen gleich. Insbesondere ist dann die ϕ-Komponente des Drehimpulses gleich seiner ψ-Komponente (vgl. Gl. (8.4.10) im Skript). In unserer Notation heisst das $M_z = M_3$. Da wir so starten und diese Grössen Konstanten der Bewegung sind, müssen wir sie nicht in θ entwickeln – die Gleichung bleibt also bestehen. Entwickeln von Gl. L.27 bis zu führender Ordnung liefert dann (mit $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$ und $\sin\theta \approx \theta$)

$$
E' \approx \frac{\Theta_1}{2}\dot\theta^2 + \left(-\frac{mgl}{2} + \frac{M_3^2}{8\Theta_1}\right)\theta^2 + mgl. \tag{L.29}
$$

Dies ist die Energiegleichung für einen eindimensionalen harmonischen Oszillator. Die Bewegungsgleichung für θ vereinfacht sich daher zu

$$
\ddot\theta = -\underbrace{\left(\frac{M_3^2}{4\Theta_1^2} - \frac{mgl}{\Theta_1}\right)}_{=:C}\theta. \tag{L.30}
$$

Die Lösungen dieser Gleichung sind jedoch nur beschränkt, solange $C > 0$. Damit der Kreisel also "stabil schläft", muss

$$
M_3^2 > 4mgl\Theta_1 \tag{L.31}
$$

erfüllt sein. Wenn wir die bekannten Anfangsbedingungen einsetzen (d.h. $M_3 = \omega\Theta_3$), dann folgt daraus die Bedingung

$$
\omega > \sqrt{4mgl\frac{\Theta_1}{\Theta_3^2}} =: \omega_0. \tag{L.32}
$$

Wenn Gl. L.32 nicht erfüllt ist, führt bereits eine kleine Störung dazu, dass der Kreisel zu taumeln beginnt. Einen schnell angeworfener Kreisel kann man also so platzieren, dass er zunächst (bis auf eine kleine Nutationsbewegung) um seine Figurenachse dreht. Im Laufe der Zeit verliert der Kreisel durch Reibungsverluste an Geschwindigkeit, bis schliesslich das Stabilitätskriterium verletzt ist. An diesem Punkt gerät die Bewegung ausser Kontrolle und der Kreisel kollabiert.

Bemerkung: Am Ende von Kapitel 8 im Skript ist ein alternativer (scheinbar komplizierterer) Lösungsweg mit Hilfe des gesamten Formalismus zu schweren Kreiseln gezeigt. Beachte, dass dort das gleiche Resultat folgt.