Übung 1. *Keplergesetze und Newtonsche Gravitation*

In der Vorlesung wurden die Keplergesetze der Planetenbewegung aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz hergeleitet. Hier soll der umgekehrte Weg beschritten werden: Leite das Newtonsche Gravitationsgesetz aus den drei Keplerschen Gesetzen her! Benutze dabei zunächst die beiden ersten Keplergesetze um zu zeigen, dass es sich bei der Gravitationskraft um eine Zentralkraft handelt und dass die Bahn eines Planeten

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\alpha \frac{\boldsymbol{x}}{r^3} \tag{1}$$

erfüllt, wobei α eine positive Konstante ist und $r = |\boldsymbol{x}|$. Zur Erinnerung sind die Keplergesetze hier nochmals erwähnt (Bezeichnungen wie in der Vorlesung):

- Die Planetenbahnen sind (ebene) Ellipsen mit Exzentrizität ε, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht:

$$r = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos\phi}, \text{ wobei } a \text{ die grosse Halbachse ist.} \tag{2}$$

- Der Verbindungsvektor von der Sonne zum Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen:

$$r^2\dot{\phi} = C_1 = \text{konst.} \tag{3}$$

- Für alle Planeten verhalten sich die Quadrate der Umlaufzeiten wie die Kuben der grossen Halbachsen:

$$\frac{T^2}{a^3} = C_2 = \text{konst.} \tag{4}$$

Lösung. Wir können das erste Gesetz umschreiben als

$$r\left(1+\varepsilon\cos\phi\right) = a\left(1-\varepsilon^2\right) = d. \tag{L.1}$$

Die Ableitung dieser Gleichung ist

$$\dot{r}\left(1+\varepsilon\cos\phi\right) - r\varepsilon\dot{\phi}\sin\phi = 0. \tag{L.2}$$

Wir setzen das zweite Gesetz $r^2\dot{\phi} = C_1$ ein und es ergibt

$$\dot{r} = \frac{C_1\varepsilon\sin\phi}{d}. \tag{L.3}$$

Jetzt leiten wir $\boldsymbol{x} = (r\cos\phi, r\sin\phi)^T$ ab und setzen das zweite Kepler-Gesetz und $(L.3)$ ein. Das ergibt

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{pmatrix}\dot{r}\cos\phi - r\dot{\phi}\sin\phi \\ \dot{r}\sin\phi + r\dot{\phi}\cos\phi\end{pmatrix} \\ &= C_1\begin{pmatrix}\frac{\varepsilon\sin\phi}{d}\cos\phi - \frac{1}{r}\sin\phi \\ \frac{\varepsilon\sin\phi}{d}\sin\phi + \frac{1}{r}\cos\phi\end{pmatrix}.\end{aligned} \tag{L.4}$$

Die Beschleunigung ist dann

$$
\begin{aligned}
\ddot{\boldsymbol{x}} &= C_1 \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{d}\dot{\phi}\left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right) + \dot{r}\frac{1}{r^2}\sin\phi - \frac{1}{r}\dot{\phi}\cos\phi \\ \frac{2\varepsilon}{d}\dot{\phi}\cos\phi\sin\phi - \dot{r}\frac{1}{r^2}\cos\phi - \frac{1}{r}\dot{\phi}\sin\phi \end{pmatrix} \\
&= C_1^2 \begin{pmatrix} \frac{\varepsilon}{d\,r^2}\left(\cos^2\phi - \sin^2\phi\right) + \frac{\varepsilon\sin\phi}{d\,r^2}\sin\phi - \frac{1}{r^3}\cos\phi \\ \frac{2\varepsilon}{d\,r^2}\cos\phi\sin\phi - \frac{\varepsilon\sin\phi}{d\,r^2}\cos\phi - \frac{1}{r^3}\sin\phi \end{pmatrix} \\
&= \frac{C_1^2}{r^3} \begin{pmatrix} \frac{r\varepsilon}{d}\cos^2\phi - \cos\phi \\ \frac{r\varepsilon}{d}\cos\phi\sin\phi - \sin\phi \end{pmatrix} \\
&= \frac{C_1^2}{r^4}\left(\frac{r\varepsilon}{d}\cos\phi - 1\right)\boldsymbol{x} \\
&= \frac{-C_1^2}{d\,r^3}\boldsymbol{x},
\end{aligned}
\tag{L.5}
$$

wobei wir das zweite Kepler-Gesetz und $(L.3)$ in der zweiten Gleichung benutzt haben und $(L.1)$ in der letzten Gleichung benutzt haben. Damit ist die Kraft $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\alpha\boldsymbol{x}/r^3$, wobei α eine positive Konstante ist.

Übung 2. *Periheldrehung*

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die gebundenen Bahnen eines Teilchens im Newtonschen Gravitationsfeld durch Ellipsen gegeben sind. Wir diskutieren nun den Effekt eines zusätzlichen Kraftfeldes der Form $C\boldsymbol{x}/r^4$ auf die Bewegung eines Teilchens mit Energie $E < 0$. Das gesamte Kraftfeld ist dann

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = -\frac{k}{r^3}\boldsymbol{x} + \frac{C}{r^4}\boldsymbol{x}\,, \tag{5}$$

wobei k und C Konstanten sind, und $r = |\boldsymbol{x}|$.

(i) Da das System weiterhin Drehimpuls und Energie erhält, kann es auf ein effektives 1-dimensionales Problem zurückgeführt werden. Bestimme das resultierende 1-dimensionale Potential $V(r)$, und zeige, dass es von der Bahngleichung

$$r(\varphi) = \frac{a(1-\epsilon^2)}{1+\epsilon\cos(\gamma\varphi)} \tag{6}$$

gelöst wird. Bestimme γ als Funktion von C und k. (Für $\gamma = 1$ beschreibt (6) eine Ellipse, die für $\gamma \neq 1$ präzessiert.)

(ii) Die Präzessionsbewegung kann durch die Geschwindigkeit der Periheldrehung charakterisiert werden. (Das Perihel ist der Umkehrpunkt der Bahn, an dem der Abstand zwischen den beiden Körpern minimal ist.) Bestimme diese Geschwindigkeit für $\gamma \simeq 1$. Verwende dabei die dimensionslose Grösse

$$\eta = \frac{C}{ka}\,.$$

Hinweise: Kapitel 2.2 im Skript. (ii) Berechne die Zunahme vom Azimut φ zwischen zwei Periheldurchgängen (eine Periode) und betrachte die Abweichung $\Delta\varphi$ dieser Zunahme von 2π. Um die Periode T zu berechnen, berechne mithilfe von (6) die Fläche F, die während einer Periode vom Ortsvektor überstrichen wird und benutze, dass der Drehimpuls erhalten ist.

Lösung. Der gegebenen Kraft entspricht das zusätzlichen Potential $V(r) = C/(2r^2)$. Wir gehen wie im Skript, Kapitel 2, vor. Das zur gegebenen Kraft gehörende Potential ist hier

$$V(r) = -\frac{k}{r} + \frac{1}{2}\frac{C}{r^2}\,, \tag{L.6}$$

und das zugehörige effektiven Potential (siehe (2.1.11))

$$U(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2} + V(r) = \frac{l^2}{2\mu r^2}\gamma^2 - \frac{k}{r}\,, \tag{L.7}$$

wobei

$$\gamma := \sqrt{1 + \frac{\mu C}{l^2}}\,. \tag{L.8}$$

(i) Die gleichen Schritte wie im Kapitel 2.2 mit der Substitution $r = 1/s$ führen dann zu

$$\frac{d\varphi}{ds} = \pm(\alpha + 2\beta s - \gamma^2 s^2)^{-1/2} = \pm\gamma^{-1}\left(\tilde{\alpha} + 2\tilde{\beta}s - s^2\right)^{-1/2}\,, \tag{L.9}$$

wobei $\tilde{\alpha} = 2\mu E/(\gamma l)^2$, $\tilde{\beta} = \mu k/(\gamma l)^2$. Dies integriert sich zu

$$\gamma\varphi(s) = \arccos\left(\frac{s - \tilde{\beta}}{\sqrt{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}^2}}\right) \tag{L.10}$$

wobei wir die freie Konstante gleich Null gesetzt haben. Durch Auflösung nach r ergibt sich die Bahnkurve in Polarkoordinaten

$$r(\varphi) = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{1 + \varepsilon\cos(\gamma\varphi)}\,, \tag{L.11}$$

wobei

$$a = -\frac{\tilde{\beta}}{\tilde{\alpha}} = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{k}{2E}\,, \qquad \varepsilon = \frac{\sqrt{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta}^2}}{\tilde{\beta}} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{\mu k^2}\gamma^2}\,. \tag{L.12}$$

Wenn $\gamma = 1$ bzw. $C = 0$, ist dies die Gleichung einer Ellipse, die für $\gamma \neq 1$ präzessiert. a ist die grosse Halbachse der Ellipse, ε ihre Exzentrizität.

(ii) Nach Gleichung (L.11) ist $r(\varphi)$ minimal für $\varphi = 0$ und maximal für $\varphi = -\pi/\gamma$. Sei T das Zeitintervall zwischen zwei Periheldurchgängen, eine Periode. Während einer Periode nimmt also das Azimut φ um den Winkel $2 \cdot \pi/\gamma$ zu. Für $\gamma \simeq 1$ ist die Abweichung von der geschlossenen Ellipse dann

$$\Delta\varphi = 2\pi - 2\pi/\gamma \simeq 2\pi\,\frac{\mu C}{2l^2}\,. \tag{L.13}$$

Die Fläche F, die während einer Periode T vom Ortsvektor überstrichen wird, ist nach Gleichung (L.11) gegeben durch

$$F = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi/\gamma} r(\varphi)^2 \mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi/\gamma}\left(\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos(\gamma\varphi)}\right)^2 \mathrm{d}\varphi \tag{L.14}$$

$$= \frac{1}{2\gamma}\int_0^{2\pi}\left(\frac{a(1-\varepsilon^2)}{1+\varepsilon\cos(x)}\right)^2 \mathrm{d}x \tag{L.15}$$

$$= \frac{\pi ab}{\gamma} \tag{L.16}$$

$$= \frac{\pi a^{3/2} l}{\sqrt{\mu k}}\,, \tag{L.17}$$

wobei a die grosse Halbachse der Ellipse ist, $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$ die kleine Halbachse. In der zweiten Gleichung haben wir $\gamma\varphi = x$ substituiert. Das Integral (mit dem Faktor 1/2) ist dann die Fläche einer Ellipse, woraus die vorletzte Gleichung folgt. Die letzte Gleichung folgt aus den Definitionen

(L.12). Man bemerke, dass F nicht von γ abhängt.
Weil der Drehimpuls erhalten ist, gilt ausserdem der Flächensatz $\dot{F}(t) = l/(2\mu) = const$ (2.1.9). Die Periode ist dann gegeben durch

$$T = \frac{F}{\dot{F}} = \frac{\pi a^{3/2} l}{\sqrt{\mu k}} \frac{2\mu}{l} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{\mu}{k}} \,, \tag{L.18}$$

was auch die Periode einer nicht präzessierenden Ellipse (2.2.12) entspricht. Mit $a = -\frac{k}{2E}$ folgt dann für die Präzessionsgeschwindigkeit ω des Perihels

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{T} \simeq \frac{\mu C/(2l^2)}{a^{3/2}\sqrt{\mu/k}} = -\frac{E\sqrt{\mu k a}}{l^2}\eta \,, \tag{L.19}$$

wobei $\eta = C/(ka)$.