Übung 1. *Stabilität von Gleichgewichtslagen*

Zeige, dass eine Gleichgewichtslage $\mathbf{x}_0$ eines geladenen Teilchens (Ladung e, Masse m) in einem äusseren, *zeitlich konstanten* elektrischen Feld $\mathbf{E}(\mathbf{x})$, d.h. $\mathbf{E}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, im Vakuum instabil ist.

Hinweise:

(i) Es gilt $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, wobei das elektrische Potential ϕ die Poisson Gleichung $\Delta\phi = 0$ erfüllt.

(ii) Schreibe die linearisierte Bewegungsgleichung um den Punkt $\mathbf{x}_0$ in der Form $\dot{\mathbf{z}} = A\,\mathbf{z}$ (vgl. Kapitel 4.1 Skript).

(iii) Die Hesse-Matrix des Potentials $H_{ij}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)$ ist diagonalisierbar. Finde die Eigenwerte und Eigenvektoren von A in Abhängigkeit vom Eigenspektrum der Hesse-Matrix.

(iv) Sei M eine diagonalisierbare Matrix mit Eigenwerten $\{\lambda_k\}$ und Eigenvektoren $\{\xi_k\}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -M & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Zeige: Dann sind die Eigenwerte von A gerade $\mu_k^\pm = \pm i\sqrt{\lambda_k}$ und die dazugehörigen Eigenvektoren $\{(\xi_k, \mu_k^\pm \xi_k)\}$.

(v) Zum Beweis der Instabilität nehme vereinfachend an, dass die Hesse-Matrix des Potentials ungleich Null ist. Dies entspricht der Annahme, dass die Störung der Gleichgewichtslage in führender Ordnung linear ist.

Lösung. Die Gleichgewichtslage $\mathbf{x}_0$ ist durch $\mathbf{E}(\mathbf{x}_0) = -\nabla\phi(\mathbf{x}_0) = 0$ gekennzeichnet, d.h. sie ist ein stationärer Punkt des Potentials ϕ. Die Linearisierung der Bewegungsgleichung $m\ddot{\mathbf{x}} = e\mathbf{E}(\mathbf{x})$ um $\mathbf{x}_0$ herum, $\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x_0}$, lautet (Taylorentwicklung)

$$m\ddot{\delta\mathbf{x}} = -eH(\mathbf{x}_0)\,\delta\mathbf{x}\;,$$

wobei $H(\mathbf{x}_0)$ die Hesse-Matrix des Potentials ϕ an der Stelle $\mathbf{x}_0$ ist. Im Sinne von Kapitel 4.1 aus dem Skript lässt sich die Bewegungsgleichung schreiben als

$$\dot{\mathbf{z}} = A\,\mathbf{z}, \quad \text{mit} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} \delta\mathbf{x} \\ \dot{\delta\mathbf{x}} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1} \\ -eH(\mathbf{x}_0)/m & 0 \end{pmatrix}. \tag{L.1}$$

Da die Hesse-Matrix per Definition symmetrisch ist, sind ihre Eigenwerte alle reell. Ist $\lambda_k \in \mathbb{R}$ ein Eigenwert von $H(\mathbf{x}_0)$, so sind $\mu_k^\pm = \pm i\sqrt{e\lambda_k/m}$ Eigenwerte von A. Um die Stabilitätsbedingung $\operatorname{Re}\mu_k^\pm \leq 0$, vgl. Gl. (4.1.27) im Skript, zu erfüllen, muss daher $\operatorname{sgn}(e\lambda_k) = +1$ ($k = 1, 2, 3$) gelten, d.h. die Vorzeichen der Eigenwerte der Hesse-Matrix müssen alle das gleiche Vorzeichen haben wie die Ladung des Teilchens. Dies folgt daraus, dass für $\sqrt{e\lambda_k/m} \in i\mathbb{R}$ entweder Re $\mu_k^- > 0$ oder Re $\mu_k^+ > 0$ gelten muss.
O.B.d.A. $e > 0$, also $\lambda_k \geq 0$ ($k = 1, 2, 3$).

Da $\mathrm{tr}\,[H(\mathbf{x}_0)] = \Delta\phi(\mathbf{x}_0) = 0$, gilt für die Eigenwerte $\lambda_k \in \mathbb{R}$ von $H(\mathbf{x}_0)$

$$\sum_{k=1}^{3} \lambda_k = 0 \ , \tag{L.2}$$

wobei nicht alle λ_k verschwinden können, da $H(\mathbf{x}_0) \neq 0$ angenommen wurde. Somit kann die Stabilitätsbedingung $\lambda_k \geq 0$ $(k = 1, 2, 3)$ nicht gelten.

Das Ergebnis kann auch direkt eingesehen werden. Gl. **??** bedingt, dass das Potential ϕ in $\mathbf{x}_0$ einen Sattelpunkt besitzt. Insbesondere gibt es (mindestens) eine Richtung, längs der ϕ in $\mathbf{x}_0$ maximal ist. Damit ist $\mathbf{x}_0$ eine instabile Gleichgewichtslage bzgl. Auslenkungen in diese Richtung.

Übung 2. *Koordinatenunabhängingkeit der Euler-Lagrange Gleichungen*

Sei $\gamma(t) = \{(t, \mathbf{q}) : \mathbf{q} = \mathbf{q}(t), t_0 \leqslant t \leqslant t_1\}$ eine Kurve in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Weiter sei $F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ die Funktion von $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für welche das Funktional $\Phi = \int_{t_0}^{t_1} F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)dt$ die Länge der Kurve angibt.

(a) Welche Form nimmt das Funktional Φ in kartesischen Koordinaten an? Welche in Polarkoordinaten?

(b) Gib die Euler-Lagrange Gleichungen in beiden Koordinatensystemen an.

(c) Löse die Differentialgleichungen in beiden Koordinatensystemen und zeige, dass die Lösungen gleich sind.

Lösung.

(a) Kartesische Koordinaten:

Betrachte ein infinitesimales Stück der Kurve γ, welches durch $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$ gegeben ist. Durch Multiplikation mit $\frac{dt}{dt}$ auf beiden Seiten bekommen wir

$$\frac{ds}{dt}dt = F(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)dt = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \tag{L.3}$$

Somit hat das Funktional in kartisischen Koordinaten die folgende Form:

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt \tag{L.4}$$

Polarkorrdinaten:

Für Polarkoordinaten sind $x = r\cos\varphi$ und $y = r\sin\varphi$. Durch ableiten bekommen wir $\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi$ und $\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi$. Eingesetzt in Gl. **??** ergibt das

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2}dt \tag{L.5}$$

Die Form des Funktionals hängt also vom gewählten Koordinatensystem ab.

(b) Die Euler-Lagrange Gleichungen in kartesischen Koordinaten sind:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}F &= \frac{\partial}{\partial x}F \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right) &= 0, \end{aligned} \tag{L.6}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{y}}F &= \frac{\partial}{\partial y}F \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{y}}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2} &= 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right) &= 0. \end{aligned} \tag{L.7}$$

In Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{r}}F &= \frac{\partial}{\partial r}F \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{r}}\left(\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial r}\left(\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}\right) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{r}}{\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}}\right) &= \frac{r\dot{\varphi}^2}{\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}} \end{aligned} \tag{L.8}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}F &= \frac{\partial}{\partial \varphi}F \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}}\left(\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}\right) &= \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}\right) \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{r^2\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}}\right) &= 0\,. \end{aligned} \tag{L.9}$$

(c) Aus der vorherigen Aufgabe können wir uns leicht überzeuegen, dass in diesem Fall die Differentialgleichungen einfacher in kartesischen Koordinaten zu lösen sind.

Aus $\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}\right) = 0$ folgt $\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} = \text{const.}$ Das Gleiche gilt für $\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$ mit einer (möglicherweise) anderen Konstante. Daher:

$$\begin{aligned} C\frac{dx}{dt} &= \frac{dy}{dt} \\ \frac{dy}{dx} &= C \\ \Rightarrow y &= Cx + D, \end{aligned} \tag{L.10}$$

womit wir bewiesen haben, dass die kürzeste Streck zwischen zwei Punkten eine Gerade ist.

Zur Vollständigkeit noch in Polarkoordinaten: O.B.d.A. können wir den Anfangspunkt der Kurve bei $r = 0$ wählen. Aus Gl. **??** folgt, dass $\frac{r^2\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}} = \text{const.}$ und mit der Wahl des Anfangspunktes gilt dann $\frac{r^2\dot{\varphi}}{\sqrt{\dot{r}^2+r^2\dot{\varphi}^2}} = 0$ für alle Zeiten. Das heisst aber $\dot{\varphi}(t) = 0$ für alle t und somit $\varphi = \text{const.}$ Die kürzeste Verbindung vom Ursprung zum Endpunkt (r_1, φ_1) ist somit eine Gerade mit Polarwinkel φ_1.

Insbesondere ergeben die Behandlung mit Polarkoordinaten und mit kartesischen Koordinaten das gleiche Resultat.

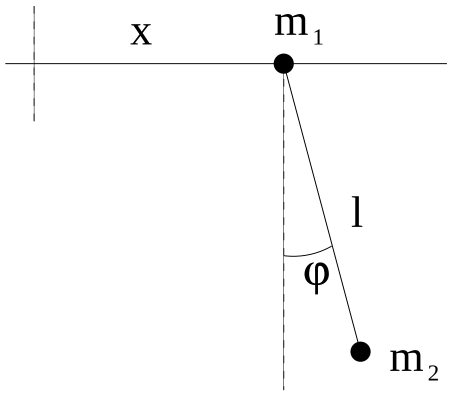

Abbildung 1: Ebenes Pendel

Übung 3. *Lagrangefunktion im homogenen Schwerefeld*

Abbildung 1. zeigt ein ebenes Pendel mit Masse m_2 im homogenen Schwerefeld, wobei sich der Aufhängungspunkt (der selbst die Masse m_1 besitzt) entlang einer horizontalen Geraden bewegen kann.

(a) Finde die Lagrangefunktion.

Hinweis. Drücke die kartesischen Koordinaten der Masse m_2 durch die x-Koordinate der Masse m_1 und den Winkel φ aus.

(b) Bestimme die Bewegungsgleichung und linearisiere sie.

(c) Bestimme die Lösung der linearisierten Bewegungsgleichungen in Abhängigkeit der allgemeinen Anfangsbedingungen $\varphi(0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(0) = \omega_0$, $x(0) = x_0$ und $\dot{x}(0) = v_0$. Interpretiere die Lösung.

Lösung.

(a) Durch Einführung der Koordinate x des Massenpunktes m_1 und des Winkels φ zwischen dem Pendelfaden und der Vertikalen, können wir die kartisischen Koordinaten des Massenpunktes m_2 schreiben als

$$\begin{aligned} x_2 &= x + l\sin\varphi, \\ y_2 &= -l\cos\varphi \end{aligned} \tag{L.11}$$

Somit ist die kinetische Energie

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2\right) \\ &= \frac{1}{2}m_1\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{x}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi\right) \\ &= \frac{m_1+m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi\right), \end{aligned} \tag{L.12}$$

und die potentielle Energie

$$V = -m_2 g l \cos\varphi. \tag{L.13}$$

Somit ist die Lagrangefunktion des Systems gegeben durch

$$L = T - V = \frac{m_1 + m_2}{2}\dot{x}^2 + \frac{m_2}{2}\left(l^2\dot{\varphi}^2 + 2l\dot{\varphi}\dot{x}\cos\varphi\right) + m_2 g l \cos\varphi\ . \tag{L.14}$$

(b) Für x sind die Euler-Lagrange Gleichungen $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial L}{\partial x}$ und

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) &= \frac{d}{dt}((m_1+m_2)\dot{x} + m_2 l\dot{\varphi}\cos\varphi)\\ &= (m_1+m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi - m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi,\\ \frac{dL}{dx} &= 0.\end{aligned} \tag{L.15}$$

Für φ sind sie $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial L}{\partial \varphi}$, wobei

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) &= \frac{d}{dt}(m_2 l^2\dot{\varphi} + m_2 l\dot{x}\cos\varphi)\\ &= m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\ddot{x}\cos\varphi - m_2 l\dot{x}\dot{\varphi}\sin\varphi,\\ \frac{dL}{d\varphi} &= -m_2 l\dot{\varphi}\dot{x}\sin\varphi - m_2 g l\sin\varphi.\end{aligned} \tag{L.16}$$

Dies führt zu den Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned}(m_1+m_2)\ddot{x} + m_2 l\ddot{\varphi}\cos\varphi &= m_2 l\dot{\varphi}^2\sin\varphi,\\ m_2 l^2\ddot{\varphi} + m_2 l\ddot{x}\cos\varphi &= -m_2 g l\sin\varphi.\end{aligned} \tag{L.17}$$

Um zu linearisieren nehmen wir an, dass sowohl φ als auch $\dot{\varphi}$ klein ist. Dadurch erhalten wir die vereinfachten Gleichungen

$$\ddot{x} + \frac{m_2}{m_1+m_2} l\ddot{\varphi} = 0, \tag{L.18}$$

$$\ddot{x} + l\ddot{\varphi} = -g\varphi. \tag{L.19}$$

(c) Durch Einsetzen von Gl. **??** in Gl. **??** kommt man auf

$$\begin{aligned}\ddot{x} + \frac{m_2}{m_1+m_2} l\ddot{\varphi} &= 0,\\ \ddot{\varphi} &= -\omega^2\varphi,\end{aligned} \tag{L.20}$$

wobei $\omega^2 = \frac{g}{l}\frac{m_1+m_2}{m_1}$. Die allgemeine Lösung für φ lautet daher

$$\varphi(t) = \varphi_0\cos(\omega t) + \frac{\omega_0}{\omega}\sin(\omega t), \tag{L.21}$$

mit $\varphi_0 = \varphi(0)$ und $\omega_0 = \dot{\varphi}(0)$. Damit lässt sich die allgemeine Lösung für x aus Gl. **??** herleiten:

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -l\frac{m_2}{m_1+m_2}\ddot{\varphi} = g\frac{m_2}{m_1}\varphi\\ \Rightarrow x(t) &= -g\frac{m_2}{m_1}\frac{\varphi_0}{\omega^2}\cos(\omega t) - g\frac{m_2}{m_1}\frac{\omega_0}{\omega^2}\sin(\omega t) + \left(v_0 + \frac{g}{\omega^2}\frac{m_2}{m_1}\omega_0\right)t + \left(x_0 + \frac{g}{\omega^2}\frac{m_2}{m_1}\varphi_0\right).\end{aligned} \tag{L.22}$$

Für das Pendel handelt es sich dabei um eine harmonische Schwingung mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\frac{m_1+m_2}{m_1}}$. Beachte, dass dies für $m_1 \to \infty$ gerade mit $\sqrt{\frac{g}{l}}$ übereinstimmt, was der Winkelgeschwindigkeit eines ungestörten Pendels im Schwerefeld entspricht. Der Massenpunkt m_1 führt die Pendelbewegung ebenfalls aus, allerdings in die entgegengesetzte Richtung und mit anderer Amplitude. Ausserdem kann seine Bewegung (je nach Anfangsbedingung v_0 und ω_0) von einer gleichförmig geradlinigen Bewegung überlagert sein.