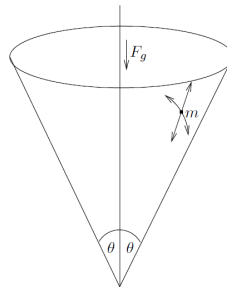


Übung 1. *Punktmasse in einem Kegel*

Betrachte eine Punktmasse m welche sich ohne Reibung in einem Kegel mit Öffnung 2θ bewegt. Das Gravitationsfeld ist parallel zur Kegelahse.



1. Wähle geeignete Koordinaten und bestimme L .
2. Leite die Lagrangegleichungen her.
3. Berechne die Erhaltungsgrößen des Systems.
4. Bestimme die Lösung der Lagrangegleichungen für welche die Masse m eine konstante Entfernung r zur Kegelspitze hat. Drücke r als Funktion des Drehimpulses aus.

Lösung. In sphärischen Koordinaten ist die Lage \vec{x} der Punktmasse durch

$$\vec{x} = r \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad (\text{L.1})$$

gegeben, wobei r die Distanz der Punktmasse zur Kegelspitze ist und φ die Winkelkoordinate um die Kegelahse. Beachte dass r und φ generalisierte Koordinaten sind im Gegensatz zu θ , welches eine Konstante ist.

1. Die Geschwindigkeit der Punktmasse ist

$$\dot{\vec{x}} = \dot{r} \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} + r \dot{\varphi} \sin(\theta) \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{L.2})$$

Die kinetische und potentielle Energien T und V sind somit

$$T = \frac{m}{2} \dot{\vec{x}}^2 = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta)) \quad V = mgr \cos(\theta). \quad (\text{L.3})$$

Dies ergibt für die Lagrangefunktion

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta)) - mgr \cos(\theta). \quad (\text{L.4})$$

2. Es wird zuerst die Euler-Lagrange-Gleichung für φ hergeleitet:

$$\partial_\varphi L = 0 \quad \partial_\varphi L = mr^2 \dot{\varphi} \sin^2(\theta). \quad (\text{L.5})$$

Die Euler-Lagrange-Gleichung für φ ist also

$$\frac{d}{dt} mr^2 \dot{\varphi} \sin^2(\theta) = 0 \quad (\text{L.6})$$

Die Grösse $P_\varphi = mr^2 \dot{\varphi} \sin^2(\theta)$ ist somit konstant. Als nächstes betrachten wir die Euler-Lagrange-Gleichung für r :

$$\partial_r L = mr \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) - mg \cos(\theta) \quad \partial_r L = m\dot{r}. \quad (\text{L.7})$$

Kürzen von m und auflösen nach \ddot{r} ergibt

$$\ddot{r} = r \dot{\varphi}^2 \sin^2(\theta) - g \cos(\theta). \quad (\text{L.8})$$

3. Da die Variable φ in der Lagrangefunktion nicht auftaucht ist sie zyklisch. Der entsprechende konjugierte Impuls $\partial_\varphi L = P_\varphi$ ist daher eine Erhaltungsgrösse (s. Skript, Gln. 5.5.1, 5.5.2). Es entspricht der Komponente L_3 des Drehimpulses $\vec{x} \times m\dot{\vec{x}}$ entlang der Kegelachse.
4. Um Lösungen mit konstantem r zu finden muss zuerst $\dot{\varphi}$ aus der Euler-Lagrange-Gleichung für r eliminiert werden. Aus der Gleichung für φ folgt:

$$\dot{\varphi} = \frac{P_\varphi}{mr^2 \sin^2(\theta)}. \quad (\text{L.9})$$

Durch Einsetzen erhält man

$$\ddot{r} = \frac{P_\varphi^2}{m^2 r^3 \sin^2(\theta)} - g \cos(\theta). \quad (\text{L.10})$$

Bei konstantem r gilt $\ddot{r} = 0$, woraus

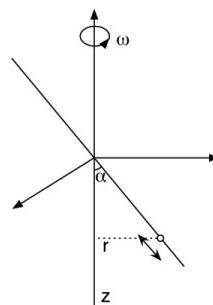
$$r = \left(\frac{P_\varphi^2}{m^2 g \cos(\theta) \sin^2(\theta)} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (\text{L.11})$$

folgt.

Übung 2. Rheonome Zwangsbedingung

Die Beispiele im Skript zum Lagrange Formalismus behandeln holonome Zwangsbedingungen, die die Zeitkoordinate t nicht enthalten (sog. "skleronome" Zwangsbedingungen). Hier soll nun eine Situation betrachtet werden, in der eine der holonomen Zwangsbedingungen von der Zeit abhängt. Eine zeitabhängige Zwangsbedingung heisst "rheonom".

Betrachte einen geraden Draht, der die z -Achse im Winkel α schneidet. Ausserdem rotiert der Draht mit Winkelgeschwindigkeit ω um die z -Achse. Eine Perle, die unter dem Einfluss der Schwerkraft reibungsfrei auf dem Draht gleitet, wird ohne Anfangsgeschwindigkeit im Schnittpunkt vom Draht mit der z -Achse losgelassen.



1. Formuliere die Zwangsbedingungen.
2. Löse die Bewegungsgleichung.
3. Ist die Gesamtenergie erhalten?

Lösung.

1. In Zylinderkoordinaten (r, ϕ, z) sind die Zwangsbedingungen

$$r + z \tan(\alpha) = 0 \tag{L.12}$$

und

$$\phi - \omega t = 0. \tag{L.13}$$

2. Wir nutzen diese Zwangsbedingungen um r und ϕ zu eliminieren und erhalten die Lagrange Funktion

$$L(z(t), \dot{z}(t), t) = \frac{m}{2} \left(\frac{\dot{z}^2}{\cos^2(\alpha)} + \tan^2(\alpha) \omega^2 z^2 \right) - mgz. \tag{L.14}$$

Die Euler-Lagrange Gleichung lautet

$$\ddot{z} - \sin^2(\alpha) \omega^2 z = -g \cos^2(\alpha). \tag{L.15}$$

Die Lösung der homogenen Differentialgleichung ist

$$z_{hom}(t) = Ae^{\sin(\alpha)\omega t} + Be^{-\sin(\alpha)\omega t}, \tag{L.16}$$

und die partikuläre Lösung zur konstanten Anregung ist ebenfalls eine Konstante,¹

$$z_{part}(t) = \frac{g \cot^2(\alpha)}{\omega^2}. \tag{L.17}$$

Einsetzen der Randbedingungen $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ führt schliesslich zur Lösung

$$z(t) = \frac{g \cot^2(\alpha)}{\omega^2} \left(1 - \cosh(\sin(\alpha) \omega t) \right). \tag{L.18}$$

3. Nein. Zur Zeit $t = 0$ ist $E=T+V=0$. Für $t \rightarrow \infty$ ist $|T| \gg |V|$ und $E \rightarrow \infty$. Die rheonome Zwangskraft verrichtet Arbeit am System.

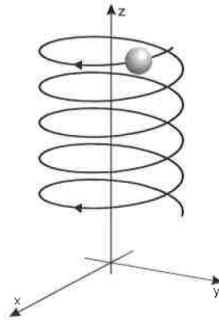
Übung 3. *Symmetrietransformationen*

1. Zeige, dass die Transformation $x \rightarrow x' = x + \lambda \cos(\omega t)$ mit $\omega = \sqrt{D/m}$ eine Symmetrietransformation des harmonischen Oszillators (mit Masse m und "Federkonstante" D) ist und berechne die dazugehörige Erhaltungsgrösse.

Hinweis: Zeige dass die Lagrange-Funktion des Harmonischen Oszillators durch die Transformation in eine Äquivalente Funktion übergeht plus der totalen Zeitableitung einer Funktion $F(x', t, \lambda)$.

¹Man kann sich überlegen, dass es irgendwo oberhalb von $z = 0$ einen Punkt geben muss, wo sich Fliehkraft (aus-/aufwärts) und Schwerkraft (abwärts) gerade aufheben.

2. Ein Massenpunkt bewegt sich unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einer unendlich langen homogenen Schraubenlinie. Stelle die Symmetrietransformation der Schraubenlinie auf und berechne die zugehörige Erhaltungsgrösse.



Lösung.

1. Nach dem Superpositionsprinzip der linearen Dgln. ist die Überlagerung $x'(t)$ der beiden Lösungen $x(t)$ und $\cos(\omega t)$ wiederum eine Lösung der linearen Bewegungsgl. des harmonischen Oszillators. Folglich muss die Lagrangefunktion unter den Transformationen

$$x \rightarrow x' = x + \lambda \cos(\omega t) \quad (\text{L.19})$$

invariant sein - eventuell bis auf eine Umeichung. In der Tat gilt:

$$L'(x', \dot{x}', t, \lambda) = \frac{m}{2}(\dot{x}' + \lambda\omega \sin(\omega t))^2 - \frac{D}{2}(x' - \lambda \cos(\omega t))^2 \quad (\text{L.20})$$

$$= \frac{m}{2}\dot{x}'^2 - \frac{D}{2}x'^2 + \frac{d}{dt}F(x', t, \lambda) \quad (\text{L.21})$$

mit $F(x', t, \lambda) := \lambda m \omega x' \sin(\omega t) + \lambda^2 f(t)$.

Die Form von $f(t)$ ist uninteressant, da $f(t)$ mit λ^2 multipliziert wird und deshalb bei der Differentiation an der Stelle $\lambda = 0$ wegfällt. Die Erhaltungsgrösse ist (s. Skrip, Gln. 5.6.12, 5.6.13):

$$K = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \frac{\partial(x' - \lambda \cos(\omega t))}{\partial \lambda} - \frac{\partial F}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} = -m(\dot{x} \cos(\omega t) + \omega x \sin(\omega t)). \quad (\text{L.22})$$

Man kann die Erhaltung von J leicht beweisen, indem man die allgemeine Lösung $x(t) = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t)$ der Bewegungsgl. in $J(x, \dot{x}, t)$ einsetzt.

2. Die Zwangsbedingungen der Schraubenlinie lauten in Zylinderkoordinaten:

$$r = \text{const} \quad z = a\varphi. \quad (\text{L.23})$$

Die potentielle Energie und somit auch die Lagrangefunktion sind unter den Transformationen

$$z \rightarrow z' = z + \lambda a \quad \varphi \rightarrow \varphi' = \varphi + \lambda \quad r \rightarrow r' = r \quad (\text{L.24})$$

invariant. Die Erhaltungsgrösse ist

$$K = -\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} a - \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \cdot 0 = -(p_z a + p_\varphi). \quad (\text{L.25})$$