

Quantenmechanik I. Übung 4.

HS 13

Abgabe: Di 22. Oktober 2013

1. Rechnen mit Kommutatoren

i) Der Kommutator $[A, B] = AB - BA$ zweier Matrizen oder Operatoren A, B ist linear in A, B und antisymmetrisch: $[B, A] = -[A, B]$. Zeige die Produktregel

$$[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$$

und die Jacobi-Identität,

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0.$$

ii) Ausgehend von $(i/\hbar)[P, X] = 1$ zeige, dass für Polynome $f(x), g(p)$

$$\frac{i}{\hbar}[P, f(X)] = f'(X), \quad \frac{i}{\hbar}[g(P), X] = g'(P)$$

gilt, wobei $f(X), g(P)$ über Summen und Produkte von Matrizen definiert sind.

iii) Leite die Vertauschungsrelationen des Drehimpulses \vec{L} her: Zeige, dass die Komponenten $L_i = X_{i+1}P_{i+2} - X_{i+2}P_{i+1}$ ($i = 1, 2, 3 \pmod{3}$) den Vertauschungsrelationen

$$[L_{i+1}, L_{i+2}] = i\hbar L_i$$

genügen. *Hinweis:* $(i/\hbar)[P_i, X_j] = \delta_{ij}$.

Zeige, dass der Erwartungswert der Komponenten L_1 und L_2 in jedem Eigenzustand von L_3 verschwindet.

2. Bewegung auf der Geraden und Tunneleffekt

Ein klassisches Teilchen benötigt eine kinetische Energie, die mindestens so gross ist, wie das Potential, das es zu überwinden gilt. Nicht so in der Quantenmechanik, wie die vorliegende Aufgabe zeigen soll.

Ein Teilchen der Energie E läuft von $x = -\infty$ gegen das Potential

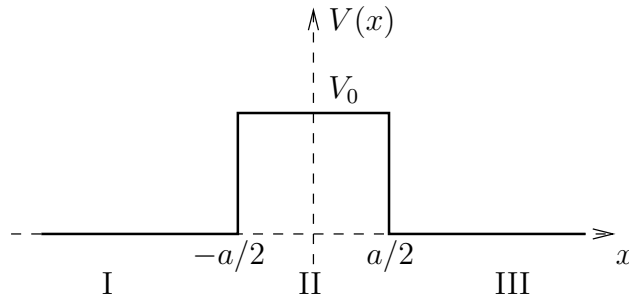
$$V(x) = \begin{cases} 0, & (|x| \geq a/2) \\ V_0, & (|x| < a/2) \end{cases} \quad (a > 0, V_0 > 0).$$

Löse die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2}(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1)$$

mit dem Ansatz

$$\begin{aligned} \psi_{\text{I}}(x) &= A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} & (x < -a/2), & & k = k(E) \\ \psi_{\text{II}}(x) &= A_2 e^{ilx} + B_2 e^{-ilx} & (|x| < a/2), & & l = l(E, V_0) \\ \psi_{\text{III}}(x) &= A_3 e^{ikx} & (x > a/2). & & \end{aligned}$$



Die Anteile $A_1 e^{ikx}$, $A_3 e^{ikx}$ und $B_1 e^{-ikx}$ beschreiben der Reihe nach eine einfallende (e), eine transmittierte (t) und eine reflektierte (r) Welle, bzw. Teilchen. Die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten sind gegeben als

$$T = \frac{j_t}{j_e}, \quad R = \frac{|j_r|}{j_e},$$

wobei j_\bullet die entsprechenden (konstanten) Stromdichten sind. Berechne $T = T(E)$ und $R = R(E)$ in den beiden Fällen (a) $0 < E < V_0$ und (b) $0 < V_0 < E$, mit dem Ergebnis: Es ist $R + T = 1$ und

$$T(E) = \frac{4E(V_0 - E)}{4E(V_0 - E) + V_0^2 \sinh^2\left(\sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}} a\right)}$$

im Fall (a); und mit den Ersetzungen $V_0 - E \rightsquigarrow E - V_0$, $\sinh \rightsquigarrow \sin$ im Fall (b).

Hinweise: • Man überlege sich, dass ψ und $d\psi/dx$ selbst an den Sprungstellen $x = \pm a/2$ des Potentials stetig sind. • Im Fall (a) ist l rein imaginär. • Zwischenresultat: $T = |A_3/A_1|^2$ und $R = |B_1/A_1|^2$.

Skizziere den Verlauf von $T(E)$. Klassisch wäre (a) $T(E) = 0$, (b) $T(E) = 1$. Im Unterschied dazu ist quantenmechanisch (a) $T(E) > 0$ (Tunneleffekt) und (b) $T(E_n) = 1$ nur für bestimmte Energien E_n (Transmissionsresonanzen). Welche? Was passiert für $\hbar \rightarrow 0$?

3. Strom und Impuls

Sei $\hbar = 2m = 1$. Ein Teilchen auf der Geraden hat

$$j(x) = 2 \operatorname{Im} \overline{\psi(x)} \psi'(x)$$

als Erwartungswert des Stroms bei x . Es handelt sich um eine lokale Eigenschaft von $\psi(x)$, im Unterschied zu jenem des Impulses $p = k$.

Zeige folgende, etwas überraschende Tatsache: Es gibt Superpositionen

$$\psi(x) = a_1 e^{ik_1 x} + a_2 e^{ik_2 x}, \quad (k_1, k_2 > 0)$$

von Wellen, die nach rechts laufen, für die der Strom bei $x = 0$ (zur betrachteten Zeit) nach links läuft: $j(0) < 0$.

Bemerkung: (ausserhalb der Aufgabe) Die Superposition ist zwar nicht normierbar, aber es gibt analoge, normierte Wellenpakete.