Quantenmechanik I. Übung 10.

HS 13 *Abgabe:* Di 3. Dezember 2013

1. Bornsche Näherung

Berechne den differentiellen Wirkungsquerschnitt in erster Bornscher Näherung (5.13) für das Yukawa-Potential

$$V(r) = -\frac{\lambda}{r}\mathrm{e}^{-\mu r}$$

mit $\mu \geq 0$ ($\mu = 0$ entspricht dem Coulomb-Potential). Vergleiche das Resultat für die Streuung zweier Teilchen der Ladungen e_1, e_2 mit dem Rutherford-Querschnitt aus der Allgemeinen Mechanik.

Hinweis: Zeige und verwende

$$\int \frac{\mathrm{e}^{-\mu|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vec{q}\cdot\vec{x}} d^3x = \frac{4\pi}{\vec{q}^2 + \mu^2} \ . \tag{1}$$

2. Teilchen in der Ebene mit transversalem magnetischem Feld, Teil 2

Betrachte den Hamiltonoperator aus Aufgabe 9.1,

$$H = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \frac{e}{c}\vec{A}(\vec{x}))^2$$

auf $L^2(\mathbb{R}^2)$, der ein Teilchen in einem konstanten Magnetfeld $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ beschreibt, aber ohne eine Eichung festzulegen.

i) Nach (Ü9.2) bewegt sich das Teilchen klassisch auf einem Kreis. Drücke den Mittelpunkt (Führungszentrum) $\vec{r}$ durch den Ort $\vec{x}$ und den kinematischen Impuls $\vec{\pi} = \vec{p} - (e/c)\vec{A}$ aus.

ii) Erhebe die Komponenten von $\vec{r} = (r_1, r_2)$ und $\vec{\pi} = (\pi_1, \pi_2)$ zu Operatoren und berechne die Kommutatoren $[\pi_i, \pi_j]$, $[r_i, r_j]$, $[\pi_i, r_j]$, $(i = 1, 2)$.

iii) Zeige, dass $\vec{r}$ erhalten ist: $[H, r_i] = 0$, $(i = 1, 2)$. Bestimme das Spektrum von H, und zwar ohne weitere Rechnungen, sondern weil er die Kommutationsrelationen mit einem anderen, bekannten Hamiltonoperator teilt.

3. Stabilität des Wasserstoffatoms

Die Energien des Wasserstoffatoms

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{|\vec{x}|}$$

sind klassisch nicht nach unten beschränkt, quantenmechanisch jedoch schon. Als heuristischer Grund dieser Stabilität wird oft die Heisenbergsche Unschärferelation vorgebracht: Ein Elektron im Abstand r vom Kern hat Impuls von der Ordnung $\Delta p \sim \hbar/r$, also Energie $\sim \hbar^2/(2mr^2) - e^2/r$, was als Funktion von $r > 0$ ein Minimum besitzt.

i) Die Überlegung taugt so nicht: Aus $\langle p_i^2\rangle_\psi \geq \langle p_i^2\rangle_\psi - \langle p_i\rangle_\psi^2 = \langle(\Delta p_i)^2\rangle_\psi$ und desgleichen für x_i folgt zwar

$$\langle\vec{p}^{\,2}\rangle_\psi\langle\vec{x}^{\,2}\rangle_\psi \geq \sum_{i=1}^{3}\langle p_i^2\rangle_\psi\langle x_i^2\rangle_\psi \geq \frac{3\hbar^2}{4}$$

und damit

$$\langle H\rangle_\psi \geq \frac{3\hbar^2}{8m}\frac{1}{\langle\vec{x}^{\,2}\rangle_\psi} - e^2\Big\langle\frac{1}{|\vec{x}|}\Big\rangle_\psi\ ;$$

aber (zeige!) es gibt Zustände $|\psi\rangle$, die die rechte Seite beliebig gross und negativ machen.

Hinweis: Wähle $\psi(\vec{x})$ als Superposition zweier Wellenfunktionen: eine weg vom Kern, die andere sehr nahe.

ii) Eine in dieser Hinsicht bessere Unschärferelation ist die Hardy-Ungleichung

$$-\Delta \geq \frac{1}{4\,\vec{x}^{\,2}} \tag{2}$$

(im Sinne quadratischer Formen, d.h. quantenmechanischer Erwartungswerte). Zeige damit: $H \geq -C$ für ein $C > 0$.

Hinweis: $\vec{p}^{\,2} = -\hbar^2\Delta$.

iii) Beweise (2).

Hinweis: Verwende Eigenschaft (a) aus Aufgabe 8.2(iii) für ein passendes Vektorfeld $\vec{q} = \vec{\nabla}Q$. Lege dieses zunächst nur bis auf ein Vielfaches fest.