Übung 1. Saddle point approximation

Lernziel: In dieser Übung lernen wir, dass man nicht immer eine exakte Lösung suchen soll. Wir kommen hier zu der Saddle Point Approximation. Im Vorlesungsskript ist der halb-klassische Fall für einen Propagator besprochen, wobei ein Volumenfaktor eingeführt wurde. Hier lernen wir, wie dieser Volumenfaktor berechnet wird.

Betrachte das Integral

$$\int dx\, f(x) e^{-g(x)}, \tag{1}$$

wobei wir annehmen, dass $e^{-g(x)}$ ein Maximum bei x_0 hat. Unterscheide folgende zwei Fälle:

- $f(x)$ ist sehr flach in der Nähe von x_0, und $e^{-g(x)}$ ist nur sehr schmal um x_0 verteilt.
- $f(x)$ hat eine wesentliche Steigung und Krümmung in der Nähe von x_0, und $e^{-g(x)}$ ist nicht unbedingt schmal.

Löse dieses Integral in beiden Fälle mit einer Näherung des dominanten Beitrags.

Übung 2. Gaußsches Wellenpaket

Lernziel: In dieser Übung schauen wir uns zwei sehr ähnliche Differentialgleichungen an: die Diffusionsgleichung und die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen. Beide Gleichungen erlauben eine Lösung in der Form eines Gaußschen Wellenpakets. Wir lernen hier die Unterschiede der beiden Gleichungen kennen.

(a) Die Diffusionsgleichung, z.B. für ein Temperaturprofil $T(x,t)$ in einer Dimension, schreibt man meist in der Form

$$\partial t\, T(x,t) = D\, \partial_x^2\, T(x,t), \tag{2}$$

wobei D die Diffusionskonstante ist. Die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen ist gegeben durch

$$i\hbar\, \partial_t\, \Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\, \partial_x^2\, \Psi(x,t), \tag{3}$$

wobei m die Masse des Teilchens ist und $\Psi(x,t)$ die Wellenfunktion. Beide Differentialgleichungen können als $\partial t\, A(x,t) = \alpha\, \partial_x^2\, A(x,t)$ geschrieben werden. Löse diese Differentialgleichung für beliebiges α. Vergleiche die Lösung mit einer ebenen Welle; was ist die Dispersion $\omega(k)$ in den beiden Fällen?

(b) Da die Differentialgleichung eine lineare Gleichung ist, sind allgemeine Linearkombinationen von Lösungen ebenfalls Lösungen. Im Allgemeinen betrachten wir deswegen ein Wellenpaket, das sich in folgender Form schreiben lässt:

$$A(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int g(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} dk. \tag{4}$$

Betrachte jetzt ein Gaußsches Wellenpaket, d.h. $g(k)$ ist eine Gauß-Funktion,

$$g(k) = e^{-\frac{1}{4}a^2k^2}. \tag{5}$$

Zeige, dass dies tatsächlich eine Lösung der Schrödingergleichung ist. Wie verhält sich die Breite des Pakets als Funktion der Zeit für beide Fälle?

Übung 3*. Harmonisches Oszillator in 1D mit Pfadintegralen

Lernziel: Hier wenden wir den Formalismus des Pfadintegrals für das Beispiel des Harmonischen Oszillators an. So versteht man, dass der Formalismus zwar fundamental schön und elegant ist, aber bereits für einfache Beispiele nicht immer ganz einfach ist.

Der Propagator eines harmonischen Oszillators ist gegeben durch das Pfadintegral

$$K(b,a) = \int \mathcal{D}[x] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}\, dt\right] \; ; \qquad \mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \; , \tag{6}$$

wobei der Pfad $x(t)$ die Bedingungen $x(t_a) = x_a$ und $x(t_b) = x_b$ erfüllen muss.

Um den Propagator zu berechnen, entwickelt man die Wirkung in der Umgebung des klassischen Pfades bis zur zweiten Ordnung. Beachte, dass in diesem Beispiel diese Entwicklung exakt ist.

(a) Sei $\bar{x}$ der klassische Pfad zwischen a und b, d.h. der Pfad, der die Wirkung minimiert ($\delta S = 0$). Schreibe $x = \bar{x} + y$ und zeige, dass für den Propagator gilt

$$K(b,a) = e^{\frac{i}{\hbar}S[\bar{x}]} \cdot F(t_b, t_a) \; , \tag{7}$$

mit einer Funktion $F(t_b, t_a)$ von t_a und t_b, die gegeben ist durch

$$F(t_b, t_a) = \int_{\substack{y(t_a)=0 \\ y(t_b)=0}} \mathcal{D}[y] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\frac{1}{2}m \int_{t_a}^{t_b} y\left(-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2\right) y\, dt\right] \; . \tag{8}$$

(b) Für $\omega = 0$ entspricht das Problem dem Fall eines freien Teilchens. Benutze die bekannte Form dieses Propagators (Gl. (1.18) im Skript), um $F(t_b, t_a)$ im Fall $\omega = 0$ zu bestimmen.

In (8) erkennen wir eine unendlich-dimensionale Version des Fresnelschen Integrals,

$$\int d^n\boldsymbol{y} \exp\left(\frac{i}{2}\boldsymbol{y}^T A \boldsymbol{y}\right) = \left(\det \frac{A}{2\pi i}\right)^{-1/2} \; , \tag{9}$$

wobei statt der Matrix A der Operator $\frac{m}{\hbar}\left(-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2\right)$ erscheint.

(c) Normierte und orthogonale Eigenfunktionen des Operators $\left(-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2\right)$ sind gegeben durch (mit $n \in \mathbb{N}^*$)

$$y_n(t) = \sqrt{\frac{2}{t_b - t_a}} \sin\left(n\pi \frac{t - t_a}{t_b - t_a}\right) \; , \quad \text{mit Eigenwert} \quad \lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{(t_b - t_a)^2} - \omega^2 \; . \tag{10}$$

Berechne die Funktionaldeterminante $\mathrm{Det}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar}\left(-\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2\right)\right)$ als unendliches Produkt der Eigenwerte dieses Operators. Alle Faktoren, die nicht von ω abhängen, können ignoriert werden, da wir die globale Normierung bereits aus Teil (b) kennen. Angenommen, dass sich die Formel (9) zum unendlichen Fall bis auf einen Normierungsfaktor verallgemeinern lässt, bestimme $F(t_b, t_a)$.

Hinweis: Benutze die Formel $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right) = \frac{\sin x}{x}$.