Übung 1. Sokhotski-Plemelj Formel

Lernziel: In der Physik werden mathematisch schlecht definierte Ausdrücke regularisiert; ein praktisches Beispiel dazu ist die Sokhotski Formel, die den Ausdruck $1/(x \pm i\epsilon)$ regularisiert. Anwendungen finden sich im Kontext von Green'schen Funktionen und deren analytischen/physikalischen Eigenschaften.

Zeige die Sokhotski-Plemelj Formel (im Limes $\varepsilon \to 0$),

$$\frac{1}{x \pm i\varepsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{x} \mp i\pi\delta\left(x\right). \tag{1}$$

Der Cauchysche Hauptwert $\mathcal{P}\frac{1}{x}$ ist, im Sinn von Distributionen, definiert auf eine Test-Funktion f als

$$(\mathcal{P}\frac{1}{x})\,[f] = \lim_{\eta \to 0^+}\left[\int_{-\infty}^{-\eta}\frac{f(x)}{x}\,dx + \int_{+\eta}^{\infty}\frac{f(x)}{x}\,dx\right]. \tag{2}$$

Übung 2. Radialteil des Laplace-Operators

Lernziel: Der Laplace-Operator nimmt ein besondere Form in Kugelkoordinaten an, welcher die Schrödingergleichung zu einer nichttrivialen Differentialgleichung macht. Wir lernen, wie sich diese Gleichung mithilfe eines passenden Ansatzes in 3D sowie in 2D vereinfacht.

Der Radialteil des Laplace-Operator lässt sich in 3 Dimensionen schreiben als

$$\Delta_r^{\mathrm{3D}} = \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r\right). \tag{3}$$

(a) Nutze den Ansatz $R(r) = u(r)/r^\alpha$ und berechne $\Delta_r R(r)$. Für welches α vereinfacht sich dieser Ausdruck?

Im Folgenden betrachten wir den Laplace-Operator in 2 Dimensionen. In diesem Fall lässt sich der Radialteil schreiben als

$$\Delta_r^{\mathrm{2D}} = \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r\right). \tag{4}$$

(b) Berechne $\Delta_r R(r)$ mit dem gleichen Ansatz wie oben. Kann man den Ausdruck wie für den 3D-Fall vereinfachen? Für welche α verschwinden alle Terme proportional zu $u' = \partial_r u$?

(c) Vereinfache die Besselgleichung,

$$r^2\frac{d^2R(r)}{dr^2} + r\frac{dR(r)}{dr} + (r^2 - \nu^2)R(r) = 0, \tag{5}$$

mit dem Ansatz aus (b) und bestimme die Asymptotik der Besselfunktionen für $r \to \infty$.

Übung 3.   2D Potentialtopf und marginal gebundene Zustände

Lernziel: Physikalische Effekte hängen von der Dimension ab, in welcher sie auftreten. Experimentell sind 2D oder 1D relevant, wenn Quantenobjekte (z.B. Elektronen) in einer oder zwei Dimensionen eingeschränkt werden, so dass sie sich nur noch in gewisse Richtungen bewegen können. Für den 2D Potentialtopf studieren wir die gebundenen Zustände und lernen, dass ein schwaches, attraktives 2D Potential immer einen marginal gebundenen Zustand besitzt.

Wir betrachten ein rotationssymmetrisches, attraktives Potential der Form

$$V(\boldsymbol{r}) = -V_0 \Theta(r_0 - |\boldsymbol{r}|) \tag{6}$$

mit $V_0 > 0$. Wir konzentrieren uns in dieser Aufgabe auf das Spektrum der gebundenen Zustände mit negativer Energie $E < 0$.

(a) Betrachte die Schrödingergleichung in 2D in Polarkoordinaten und finde die transzendente Gleichung, welche die Energien der gebundenen Zustände bestimmt.

(b) Führe die dimensionslosen Grössen $\xi_0 = \sqrt{2mV_0} r_0/\hbar$ und $\epsilon = E/V_0$ ein und löse die transzendente Gleichung numerisch, um das Spektrum der gebundenen Zustände als Funktion der dimensionslosen Potentialstärke ξ_0 zu bestimmen.

(c) Betrachte den Fall infinitesimaler Potentialstärke $\xi_0 \ll 1$ und zeige, dass immer ein gebundener Zustand existiert. Wieso bezeichnet man diesen Zustand als *marginal* gebunden?