Übung 1. Klassische Wirkung

(a) Zur Bestimmung der klassischen Bahnen kann die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = 0. \tag{L.1}$$

verwendet werden. Anschliessend integrieren wir entlang dieser Bahnen um die klassische Wirkung zu erhalten.

(i) Für ein freies Teilchen ist die Bewegung wohl bekannt

$$q(t) = vt + q_0 = \frac{q_b}{t_b}t \tag{L.2}$$

damit ergibt sich die klassische Wirkung zu

$$S = \int_{t_a}^{t_b} \frac{m\dot{q}^2}{2} dt = \frac{m}{2}\int_0^{t_b} \Big(\frac{q_b}{t_b}\Big)^2 dt = \frac{m}{2}\frac{q_b^2}{t_b}. \tag{L.3}$$

(ii) Die klassische Lösung des harmonischer Oszillators lautet

$$q(t) = A\sin(\omega t + \varphi) \tag{L.4}$$

Die Randbedingungen ergeben $\varphi = 0$ and $A = q_b/\sin(\omega t_b)$. Damit ergibt sich die Wirkung zu

$$S = \frac{m\omega^2 A^2}{2}\int_0^{t_b} \cos(2\omega t)dt = \frac{m\omega A^2}{2}\sin(\omega t_b)\cos(\omega t_b) = \frac{m\omega q_b^2}{2\tan(\omega t_b)}. \tag{L.5}$$

(iii) Die klassische Lösung eines konstanten Kraftfeldes lautet

$$q(t) = -\frac{F}{2m}t^2 + Ct, \tag{L.6}$$

wobei $C = \frac{F}{2m}t_b + \frac{q_b}{t_b}$. Damit ergibt sich die Wirkung zu

$$S = \int_0^{t_b} \Big(\frac{F^2}{m}t^2 - 2FCt + \frac{mC^2}{2}\Big)dt = -\frac{F^2 t_b^3}{24m} - \frac{Fq_b t_b}{2} + \frac{mq_b^2}{2t_b}. \tag{L.7}$$

(b) Allgemein führt eine (infinitesimale) Variation der Randbedingungen $q_b \to \bar{q}_b = q_b + \delta q_b$ und $t_b \to \bar{t}_b = t_b + \delta t_b$ zu einer infinitesimalen Änderung der klassischen Bahn $q(t) \to \bar{q}(t) = q(t) + \delta q(t)$. Die Änderung der Wirkung ist nun

$$\begin{aligned}
\delta S = S[\bar{q};\bar{q}_b,\bar{t}_b] - S[q;q_b,t_b] &= \int_{t_a}^{t_b} dt(\mathcal{L}(\bar{q},\dot{\bar{q}},t) - \mathcal{L}(q,\dot{q},t)) + \int_{t_b}^{\bar{t}_b} dt(\mathcal{L}(\bar{q},\dot{\bar{q}},t) \\
&= \int_{t_a}^{t_b} dt\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\delta q + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta\dot{q}\Big) + \delta t_b \mathcal{L}(q_b,\dot{q}_b,t_b) \\
&= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\delta q\Big|_{t_a}^{t_b} + \int_{t_a}^{t_b} dt\Big[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\Big)\Big] + \delta t_b \mathcal{L}(q_b,\dot{q}_b,t_b),
\end{aligned} \tag{L.8}$$

wobei wir benutzt haben, dass die Änderung der Bahn infinitesimal ist. Da die klassische Bahn die Euler-Lagrange Gleichungen erfüllt, gilt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}}\Big) = 0 \tag{L.9}$$

und somit finden wir $\delta S = (\partial\mathcal{L}/\partial\dot{q})\delta q|_{t_a}^{t_b} + \delta t_b \mathcal{L}(q_b, \dot{q}_b, t_b)$.

Betrachten wir uns nun den Fall einer Variation $\delta q_b \neq 0$ und $\delta t_b = 0$ folgt

$$\frac{\partial S}{\partial q_b} = \frac{\delta S}{\delta q_b} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_b}(q_b, \dot{q}_b, t_b) = p_b, \tag{L.10}$$

wobei wir den konjugierten Impuls p_b eingeführt haben. Für eine Variation der Bahn mit $\delta q_b = 0$ und $\delta t_b \neq 0$ (gleicher Endpunkt zu einem späteren Zeitpunkt) gilt $\delta q(t_b) = -\dot{q}_b \delta t_b$ und somit folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial t_b} = \frac{\delta S}{\delta t_b} &= \frac{\partial \mathcal{L}(q_b, \dot{q}_b, t_b)}{\partial \dot{q}_b}(-\dot{q}_b) + \mathcal{L}(q_b, \dot{q}_b, t_b) = \big(-p_b\dot{q}_b + \mathcal{L}(q_b, \dot{q}_b, t_b)\big) \\ &= -H(q_b, p_b, t_b) \end{aligned} \tag{L.11}$$

Übung 2. Gaußsche Integrale

(a) Einerseits gilt

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)} dx\, dy = \int e^{-ax^2} dx \int e^{-ay^2} dy = \Big(\int e^{-ax^2} dx\Big)^2. \tag{L.12}$$

Andererseits ergibt direkte Integration unter Verwendung von Polarkoordinaten $\{r, \varphi\}$

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)} dx\, dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\infty dr\, r e^{-ar^2} \overset{ar^2 \to t}{=} \frac{\pi}{a}\int_0^\infty dt\, e^{-t} = \frac{\pi}{a}. \tag{L.13}$$

Daraus folgt $\int e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi/a}$.

(b) Der Exponent kann durch quadratische Ergänzung auf die Form eines Gaußschen Integrals gebracht werden. Damit ergibt sich

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2+bx+c}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-\frac{b}{2a})^2 + \frac{b^2}{4a} + c}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}+c}$$

(c) Zunächst wird eine beliebige Zeit t_c gewählt, wobei $t_a < t_c < t_b$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int dx_c\, K(b,c)K(c,a) &= \frac{m}{2\pi i\hbar\sqrt{t_{bc}t_{ca}}}\int dx_c \exp\frac{im(x_b-x_c)^2}{2\hbar t_{bc}} \exp\frac{im(x_c-x_a)^2}{2\hbar t_{ca}} \\ &= \frac{m}{2\pi i\hbar\sqrt{t_{bc}t_{ca}}}\int dx_c \exp\left\{\frac{im}{2\hbar t_{bc}t_{ca}}[t_{ba}x_c^2 - 2(t_{ca}x_b + t_{bc}x_a)x_c + t_{ca}x_b^2 + t_{bc}x_a^2]\right\} \\ &= \frac{m}{2\pi i\hbar\sqrt{t_{bc}t_{ca}}}\sqrt{-\frac{2\pi\hbar t_{bc}t_{ca}}{imt_{ba}}}\exp\left\{\frac{m(t_{ca}x_b + t_{bc}x_a)^2}{2\hbar i t_{bc}t_{ca}t_{ba}} + \frac{im}{2\hbar t_{bc}t_{ca}}(t_{ca}x_b^2 + t_{bc}x_a^2)\right\} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t_{ba}}}\exp\left\{\frac{im}{2\hbar t_{ba}}\left[-\frac{(t_{ca}x_b + t_{bc}x_a)^2}{t_{bc}t_{ca}} + \frac{t_{ba}(t_{ca}x_b^2 + t_{bc}x_a^2)}{t_{bc}t_{ca}}\right]\right\} \\ &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t_{ba}}}\exp\frac{im(x_b-x_a)^2}{2\hbar t_{ba}} = K(b,a).\end{aligned}$$

Hier wurde die Integration über x_c unter Verwendung von (b) durchgeführt.

Übung 3. Bohr-Sommerfeld Quantisierung (1915)

(a) Die Wirkungsvarible $J(E)$ ergibt sich als Oberflächenintegral

$$J(E) = \oint pdq. \tag{L.14}$$

Eine direkt Integration kann man jedoch vermeiden, da der Phasenraum eine Ellipse mit dem Rand $E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2}$ darstellt. Die Wirkvariable

$$J(E) = \sqrt{2mE}\sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}\pi = \frac{2\pi E}{\omega}, \tag{L.15}$$

entspicht damit der Fläche dieser Ellipse. Aus der Bohr-Sommerfeld Quantisierung folgt

$$E_n = \frac{h}{2\pi}\omega(n+\alpha) = \hbar\omega(n+\alpha). \tag{L.16}$$

Die Amplitude entspricht der Halbachse entlang q und damit

$$A_n = \sqrt{\frac{2E_n}{m\omega^2}} = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}(n+\alpha)}. \tag{L.17}$$

Die Periode $T = J(E_n)/E_n = 2\pi/\omega$ ist nicht von n abhängig.

(b) Die gesamte Phase die ein Teilchen während eines Umlaufs aufnimmt ermittelt sich aus

$$\frac{1}{\hbar}\oint pdq + 2(2\varphi), \tag{L.18}$$

wobei zwei identische Reflexionen (mit jeweiliger Phasenänderung 2φ) berücksichtigt wurden. Mit der Quantisierungsbedingung folgt nun sofort

$$\oint pdq = h(n - 4\varphi/2\pi), \tag{L.19}$$

und somit $\alpha = -2\varphi/\pi$ (bis auf Modulo 1). Aus dem Spektrum des quantenmechanischen harmonischen Oszillators $E_n = \hbar\omega(n + 1/2)$ finden wir somit $\varphi = \pi/4$. Dieser Wert der Phasenverschiebung lässt sich verallgemeinern für alle linearen Potentialwände $V(x) = ax + b$ $(a < \infty)$.

Für eine unendlich hohe Potentialwand muss die Wellenfunktion auf dem Rand verschwinden, also $\psi_{\text{in}} + \psi_{\text{out}} = 0$. Da hier $\psi_{\text{out}} = r\psi_{\text{in}}$ gilt, folgt daraus $r = |r|e^{2i\varphi} = -1$. Somit gilt für eine unendlich hohe Potentialwand $\varphi = \pi/2$.