Übung 1. Drehimpulsaddition

(a)
$$[J_i, J_j] = [L_i + S_i, L_j + S_j] = [L_i, L_j] + [L_i, S_j] + [S_i, L_j] + [S_i, S_j] \tag{L.1}$$
$$= i\epsilon_{ijk}L_k + i\epsilon_{ijk}S_k = i\epsilon_{ijk}J_k. \tag{L.2}$$

(b) Da $J_z|1, m_l\rangle \otimes |\frac{1}{2}, m_s\rangle = (m_l + m_s)|1, m_l\rangle \otimes |\frac{1}{2}, m_s\rangle$ ist, sind die Zustände $|1, m_l\rangle \otimes |\frac{1}{2}, m_s\rangle$ bereits Eigenzustände von J_3. Der Basis-Zustand mit maximalem Eigenwert ist (bis auf Phase) eindeutig; in unserem Beispiel ist er gegeben durch $m^+ = m_l^+ + m_s^+ = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Er gehört zu der Darstellung mit $j = m^+ = \frac{3}{2}$, d.h.

$$|j = \frac{3}{2}, m = \frac{3}{2}\rangle = |1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle. \tag{L.3}$$

Wenden wir nun den Absteigeoperator $J_- = L_- + S_-$ an, so finden wir auf der rechten Seite

$$J_-|1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle = L_-|1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |1, 1\rangle \otimes S_-|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle \tag{L.4}$$

und auf der linken

$$J_-|\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\rangle = \sqrt{3}|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle. \tag{L.5}$$

Daher ist

$$|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}|1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\right). \tag{L.6}$$

Erneute Anwendung von J_- auf der rechten Seite liefert

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}J_-|1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + J_-|1, 1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\right) \tag{L.7}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{2}\left(|1, -1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + |1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\right) + \sqrt{2}|1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\right] \tag{L.8}$$
$$= \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\sqrt{2}|1, -1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + 2|1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\right), \tag{L.9}$$

und auf der linken

$$J_-|\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\rangle = 2|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \tag{L.10}$$

Daraus erhalten wir

$$|\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1, -1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\rangle + \sqrt{2}|1, 0\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle\right). \tag{L.11}$$

Durch erneutes Anwenden von J_- finden wir den Zustand

$$|\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\rangle = |1, -1\rangle \otimes |\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle. \tag{L.12}$$

Dieser Zustand ist derjenige mit niedrigstem m-Wert zu $j = \frac{3}{2}$, der analog zu demjenigen mit höchstem m-Wert (L.3) mit einem der ursprünglichen Tensorprodukt-Zustände zusammenfällt. Damit haben wir alle Basiszustände der $j = \frac{3}{2}$-Darstellung gefunden.

Von der ursprünglichen Tensorprodukt-Basis bleiben wegen (L.3) und (L.12) jetzt nur noch Linearkombinationen aus

$$|1,1\rangle \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle, |1,0\rangle \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \tag{L.13}$$

$$|1,0\rangle \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle, |1,-1\rangle \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle \tag{L.14}$$

übrig. Dabei haben alle Zustände der ersten Zeile (L.13) bezüglich J_z den Eigenwert $m = +\frac{1}{2}$, und die Zustände in der letzten Zeile den Eigenwert $m = -\frac{1}{2}$. Zusammen bilden sie also eine Darstellung der Drehimpulsalgebra mit Spin $j = \frac{1}{2}$. Die Kombination mit $j = \frac{1}{2}$, $m = +\frac{1}{2}$ muss zudem orthogonal auf den Zustand in (L.6) stehen, da sie bezüglich $\boldsymbol{J}^2$ ja einen anderen Eigenwert besitzt:

$$\langle\frac{3}{2},\frac{1}{2}||\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = 0. \tag{L.15}$$

Setzen wir

$$|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \alpha|1,0\rangle \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle + \beta|1,1\rangle \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle \tag{L.16}$$

an, so erhalten wir daraus

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}\beta = 0. \tag{L.17}$$

Zusammen mit der Normierung $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ folgt

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \beta = -\frac{2}{3} \tag{L.18}$$

bzw.

$$|\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(|1,0\rangle \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle - \sqrt{2}|1,1\rangle \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\right). \tag{L.19}$$

Wendet man nun erneut J_- auf (L.19) an, so findet man

$$|\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt{2}|1,-1\rangle \otimes |\frac{1}{2},\frac{1}{2}\rangle - |1,0\rangle \otimes |\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\rangle\right). \tag{L.20}$$

Man stellt leicht fest, dass dieser Zustand wie erforderlich orthogonal zu (L.11) ist. Die Zustände (L.19) und (L.20) bilden die Basis einer $j = \frac{1}{2}$-Darstellung. Bezeichnet $\mathcal{H}_j$ die irreduzible Darstellung der Drehimpulsalgebra zum $\boldsymbol{J}^2$-Eigenwert $j(j+1)$, so finden wir zusammenfassend also, dass die Darstellung $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_{1/2}$ reduzibel ist und in die irreduziblen Anteile $\mathcal{H}_{3/2}$ und $\mathcal{H}_{1/2}$ zerfällt

$$\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_{1/2} = \mathcal{H}_{3/2} \oplus \mathcal{H}_{1/2}. \tag{L.21}$$

Die Basis von $\mathcal{H}_{3/2}$ ist bezüglich der kanonischen Basis des Tensorprodukts gegeben in (L.3) - (L.12), und die Basis von $\mathcal{H}_{1/2}$ ist (L.19), (L.20).

(c) Mit $l = 1$ stimmen die Koeffizienten mit dem Ergebnis aus der Vorlesung überein.

Übung 2. Wasserstoff-Atom im Magnetfeld: Aufspaltung des Grundzustandes

Der Grundzustand des Elektrons im Wasserstoffatom (1s Zustand) ist zweifach entartet:

$$|n = 1, l = 0, s = 1/2, m_l = 0, m_s = \pm 1/2\rangle. \tag{L.22}$$

In Abwesenheit eines Magnetfeldes ist seine Energie durch die Rydberg-Energie $-E_R$ gegeben. Ein Magnetfeld führt zu einem zusätzlichen Zeemann-Term im Hamiltonian,

$$H_Z = \frac{e}{2m_e c}\boldsymbol{H} \cdot (\boldsymbol{L} + g\boldsymbol{S}), \tag{L.23}$$

welcher zu einer Verschiebung der beiden Energielevel um

$$\Delta E_Z = \frac{e}{2m_e c} H_z g m_s \approx \pm \mu_B H_z \tag{L.24}$$

und somit zu einer Aufspaltung des Grundzustandes führt. Beachte, dass die Richtung des Magnetfeldes die Quantisierungsachse bestimmt und diese somit als z-Achse gewählt wird.

Übung 3. Qubits, Spins und angeregte Atomzustände

(a) Damit ein Qubit ein Analog zum klassischen Bit darstellen kann, muss es zwei unterscheidbare (logische) Zustände besitzen. Damit es sich um ein Quantenbit handelt, müssen die beiden Zustände des Systems Quantenzustände sein, sodass das System sich auch in einer Superposition der beiden Zustände befinden kann. Diese Eigenschafte sind allerdings keinesfalls genügend für eine experimentelle Realisierung eines Qubits. Hinreichende Bedingungen sind als DiVincenzo-Kriterien bekannt[1].

(b) Ein Spin-1/2 Teilchen hat zwei mögliche Zustände $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$ und bildet somit eine Realisierung eines Qubits. Für den Grundzustand $|0\rangle$ und einen angeregten Zustand $|1\rangle$ gilt dasselbe. Beide Realisierungen bilden somit einen zwei-dimensionalen Hilbertraum mit zwei unterscheidbaren Basiszuständen, wobei sich das System in einer beliebigen Superposition der beiden Zustände befinden kann.

(c) Wie wir in Serie 8 gezeigt haben, lassen sich alle Spin-Rotationen darstellen als

$$U_{\omega\hat{\mathbf{n}}} = \cos(\omega/2)\mathbb{I} - \frac{2i}{\hbar}\sin(\omega/2)(\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{S}) \tag{L.25}$$

mit einem Drehwinkel ω, einer beliebigen Drehachse $\hat{\mathbf{n}}$ dem Spin-Operator $\boldsymbol{S} = (S_x, S_y, S_z)$ mit $S_\pm = S_x \pm iS_y$ und

$$S_z|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}\hbar|\uparrow\rangle, \qquad S_z|\downarrow\rangle = -\frac{1}{2}\hbar|\uparrow\rangle, \tag{L.26}$$

$$S_-|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}\hbar|\downarrow\rangle, \qquad S_-|\downarrow\rangle = 0, \tag{L.27}$$

$$S_+|\uparrow\rangle = 0, \qquad S_+|\downarrow\rangle = \frac{1}{2}\hbar|\uparrow\rangle. \tag{L.28}$$

Diese Spinrotationen definieren alle möglichen Qubit-Rotationen. Analog lässt sich für eine andere Qubit-Realisierung eine Spinalgebra einführen, sodass die Qubit-Rotationen die Form von Gleichung (L.25) besitzen.

[1] D. P. DiVincenzo, in Mesoscopic Electron Transport, Vol. 345 of NATO Advanced Study Institute, Series E: Applied Sciences, edited by L. Sohn, L. Kouwenhoven, and G. Schoen (Kluwer, Dordrecht, 1997), sowie unter http://arxiv.org/abs/cond-mat/9612126

Übung 4. Quantenteleportation

(a) Der Zustand $|\psi_{123}\rangle$ lässt sich in folgender Form schreiben:

$$|\psi_{123}\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\Psi^-_{23}\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(|{\uparrow_1\uparrow_2\downarrow_3}\rangle - |{\uparrow_1\downarrow_2\uparrow_3}\rangle\right) + \frac{b}{\sqrt{2}}\left(|{\downarrow_1\uparrow_2\downarrow_3}\rangle - |{\downarrow_1\downarrow_2\uparrow_3}\rangle\right) \tag{L.29}$$

$$= \frac{1}{2}\Big[|\Psi^-_{12}\rangle\left(-a\,|{\uparrow_3}\rangle - b\,|{\downarrow_3}\rangle\right) + |\Psi^+_{12}\rangle\left(-a\,|{\uparrow_3}\rangle + b\,|{\downarrow_3}\rangle\right) + \tag{L.30}$$

$$|\Phi^-_{12}\rangle\left(a\,|{\downarrow_3}\rangle + b\,|{\uparrow_3}\rangle\right) + |\Phi^+_{12}\rangle\left(a\,|{\downarrow_3}\rangle - b\,|{\uparrow_3}\rangle\right)\Big]\,. \tag{L.31}$$

Aus (L.30) kann man lesen, dass die Messresultate $|\Psi^\pm_{12}\rangle$ und $|\Phi^\pm_{12}\rangle$ je mit Wahrscheinlichkeit 1/4 vorkommen. Nach Alices Messung wird der Zustand $|\psi_{123}\rangle$ auf einen von den vier Termen in (L.30) projeziert. Insbesondere wird Bobs Teilchen je nach Messresultat auf einen der folgenden Zustände projeziert:

$$-\,|\phi_3\rangle\,, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle \tag{L.32}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle\,, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} |\phi_3\rangle\,, \tag{L.33}$$

wobei $|\phi_3\rangle = a\,|{\uparrow_3}\rangle + b\,|{\downarrow_3}\rangle$.

(b) Wenn Bob weiss, auf welchen Zustand sein Teilchen projeziert worden ist, braucht er nur die relevante unitäre Operation anzuwenden, um den Zustand $|\phi_3\rangle$ zu rekonstruieren:

$$-\,\mathbb{I}\left[-|\phi_3\rangle\right] = |\phi_3\rangle\,, \qquad -\,\sigma_z\left[\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}|\phi_3\rangle\right] = |\phi_3\rangle \tag{L.34}$$

$$\sigma_x\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}|\phi_3\rangle\right] = |\phi_3\rangle\,, \qquad i\sigma_y\left[\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}|\phi_3\rangle\right] = |\phi_3\rangle\,, \tag{L.35}$$