Exercise 1. Klassische Wirkung

Lernziel: In dieser Übung soll die klassische Wirkung verschiedener physikalischer Systeme repetiert werden. Die klassischen Bewegungsgleichungen ergeben sich aus der Minimierung der Wirkung.

In der klassischen Mechanik ist die Wirkung S definiert durch

$$S[q] = \int_{t_a}^{t_b} \mathcal{L}(q(t), \dot{q}(t), t) dt. \tag{1}$$

Die Wirkung hängt von der Bahn, beginnend zum Zeitpunkt t_a am Punkt q_a und endend am Punkt q_b zum Zeitpunkt t_b, ab.

(a) Die klassische Bahn minimiert die Wirkung:

$$\frac{\delta S}{\delta q} = 0\,. \tag{2}$$

Leite daraus die Euler-Lagrange-Gleichung her.

(b) Berechne die Wirkung entlang der klassischen Bahn für folgende Systeme:

(i) Freies Teilchen: $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = m\dot{q}^2/2$

(ii) Harmonischer Oszillator: $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = m\dot{q}^2/2 - m\omega^2 q^2/2$

(iii) Konstantes Kraftfeld: $\mathcal{L}(q, \dot{q}, t) = m\dot{q}^2/2 - Fq$

Benutze als Anfangsbedingung für die obigen Fälle $t_a = 0$ und $q_a = 0$ und schreibe die Resultate als Funktion des Endpunktes (q_b, t_b).

(c) Die Wirkung $S[q; t_a, t_b]$ ist auch eine Funktion des Anfangs- und Endpunktes. Berechne nun die allgemeine Variation

$$\delta S = S[q + \delta q; t_a + \delta t_a, t_b + \delta t_b] - S[q; t_a, t_b]\,, \tag{3}$$

wenn die Endpunkte nicht festgehalten sind.

Hinweis: *Die Anfangs- und Endpunkte der Bahn ändern sich wie folgt*

$$(q_i, t_i) \to (\bar{q}_i, \bar{t}_i) = (q_i + \delta q_i, t_i + \delta t_i)\,, \quad i = a, b\,, \tag{4}$$

siehe auch Fig. 1. Wir bezeichnen die Variation der Bahn mit $\delta q(t) = \bar{q}(t) - q(t)$. Vorsicht: Es gilt nun nicht mehr, dass $\delta q(t_i) = \delta q_i$. $\delta q(t)$ ist die Variation der Bahn, δq_a und δq_b sind die Variationen der Anfangs- und Endpunkte. Aus Gl. 4 (oder Fig. 1) sehen wir, dass gilt $\bar{q}(t_i + \delta t_i) = q(t_i) + \delta q_i$. Daraus folgt zu erster Ordnung

$$\delta q(t_i) = \delta q_i - \dot{q}(t_i)\delta t_i \quad \text{für} \quad i = a, b\,. \tag{5}$$

Auch gilt immer noch $\delta S = 0$ für jede mögliche Variation der Bahn. Wählt man eine Variation mit $\delta q_i = \delta t_i = 0$, so erhalten wir die Euler-Lagrange-Gleichung. Diese muss also immer erfüllt sein, deshalb fällt dieser Term weg.

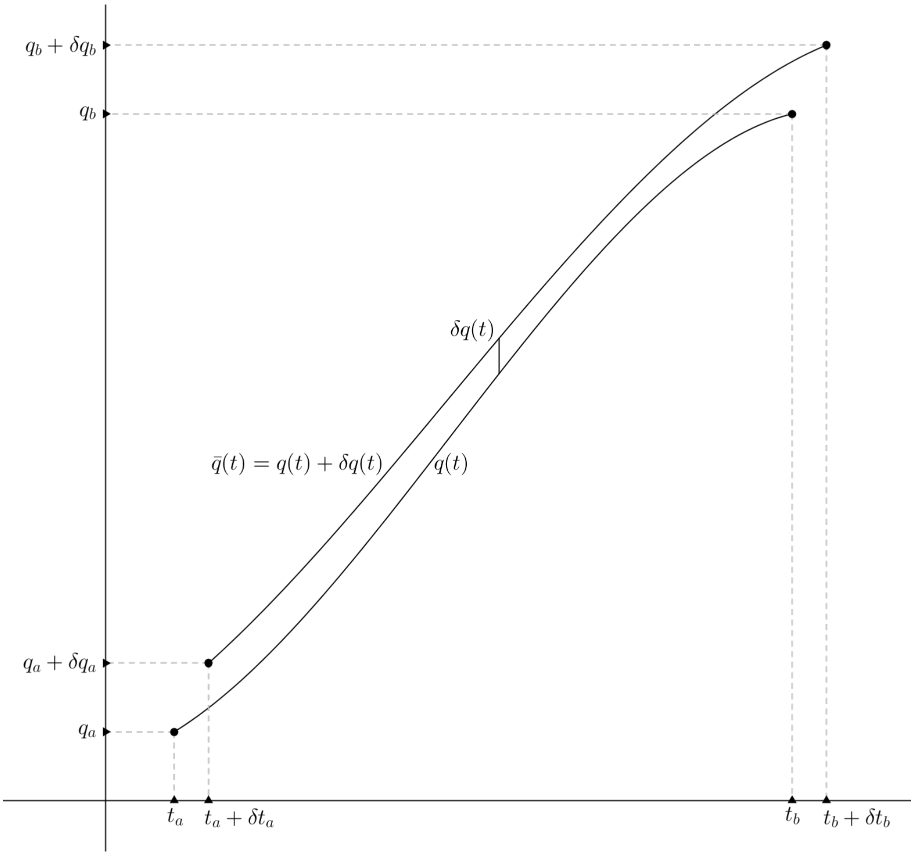

Figure 1: Variation der Bahn mit variablen Anfangs- und Endpunkten

Zeige, dass sich, aus der Variation des Endpunktes $q_b \to \bar{q}_b = q_b + \delta q_b$ bei festgehaltenem q_a,t_a und t_b, folgende Beziehung ergibt,

$$\frac{\delta S}{\delta q_b} = p_b \,, \tag{6}$$

wobei $p_b = p(t_b)$ der konjugierte Impuls zu q zur Endzeit darstellt. Zeige weiter, dass gilt

$$\frac{\delta S}{\delta t_b} = -\mathcal{H}(q_b, p_b, t_b) \,, \tag{7}$$

wenn die Endzeit $t_b \to \bar{t}_b = t_b + \delta t_b$ variiert, aber q_a,q_b und t_a festgehalten werden.

Exercise 2. Gaußsche Integrale

Lernziel: In dieser Übung soll die Klasse der gaußschen Integrale untersucht werden. Diese Integrale tauchen sowohl in Anwendungen als auch in formalen Überlegungen der Quantenmechanik häufig auf. In der Statistik sind sie als gaußsche Fehlerintegrale bekannt.

(a) Zeige:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \tag{8}$$

Hinweis: Integriere zunächst die Funktion $e^{-a(x^2+y^2)}$ über den gesamten $\mathbb{R}^2$, sowohl in Polar- als auch in kartesischen Koordinaten.
Zeige damit, dass die Gauß-Verteilung mit Standardabweichung σ normiert ist:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = 1\,. \tag{9}$$

(b) Berechne das verallgemeinerte Gauß Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-ax^2+bx+c} \tag{10}$$

(c) Zeige, dass die Fourier-Transformation der Gauß-Verteilung wieder eine Gauß-Verteilung ergibt, i.e.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{x^2}{2}}\, e^{-ikx} = e^{-\frac{k^2}{2}}\,. \tag{11}$$

(d) * Die Übergangsamplitude eines freies Teilchens, das von einem Punkt $a := (x_a, t_a)$ zu einem Punkt $b := (x_b, t_b)$ propagiert, hat die Form

$$K(b,a) = \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar t_{ba}}}\exp\left(\frac{im(x_b - x_a)^2}{2\hbar t_{ba}}\right), \tag{12}$$

wobei $t_{ba} = t_b - t_a$. Überzeuge dich unter Verwendung dieser Amplitude, dass die Beziehung [siehe auch Gl. (1.27) im Vorlesungsskript]

$$K(b,a) = \int dx_c\, K(b,c)K(c,a), \tag{13}$$

unabhängig von der Zeit t_c gültig ist.

Exercise 3. Plancksches Strahlungsgesetz[1] (1900)

Lernziel: Die mittlere Energie (thermische Mittelung) einer Mode hängt entscheidend davon ab, ob die Energiezustände kontinuierlich oder diskret sind. Dies wollen wir hier verstehen.

Betrachte eine einzelne Mode (oder ein System mit einem Freiheitsgrad), das Zustände mit Energien $E \in [0,\infty[$ annehmen kann. Die Wahrscheinlichkeit, dass sich das System bei der Temperatur T im Zustand mit Energie E befindet ist durch den Bolzmann-Faktor $e^{-\beta E}$ gegeben (wobei $\beta = 1/k_B T$).

(a) Berechne den thermischen Energie-Erwartungswert für die Mode

$$\langle E\rangle_{\text{klass.}} = \frac{\int_0^\infty dE\; E\, e^{-\beta E}}{\int_0^\infty dE\; e^{-\beta E}}\,. \tag{14}$$

[1] M. Planck, *Verhandlungen der Deutschen physikalischen Gesellschaft* **2**, 237-245 (1900).

(b) Basierend auf das Experiment zum Photoeffekt (1905) postulierte Einstein[2], dass die Energie der elektormagnetischen Strahlung nur quantisiert auftreten kann, mit $E_n = n\hbar\omega$. Modifiziere deshalb obiges System dahingehend und bestimme die Änderung des Energie-Erwartungswerts

$$\langle E \rangle_{\text{quant.}} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} E_n \, e^{-\beta E_n}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\beta E_n}}. \tag{15}$$

(c) Diskutiere die Grenzfälle hoher ($kT \gg \hbar\omega$) und tiefer ($kT \ll \hbar\omega$) Temperaturen.

(d) Berechne nun die gesamte Energiedichte

$$U = \sum_{k,\lambda} \frac{\hbar\omega_k}{e^{\beta\hbar\omega_k} - 1}\,, \tag{16}$$

wobei λ für die zwei Polarisationen steht und die Dispersionsrelation $\omega_k = c|\boldsymbol{k}|$ gilt. Forme dafür die Summe in ein Integral um

$$U = 2\frac{V}{(2\pi)^3} \int dk^3 \frac{\hbar\omega_k}{e^{\beta\hbar\omega_k} - 1}\,, \tag{17}$$

und benutze

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15}\,. \tag{18}$$

Wie vergleicht sich dieses Resultat zum klassischen Fall?

[2] A. Einstein, *Annalen der Physik* **322**, 132-148 (1905)