Übung 1. Sattelpunkt-Näherung

Lernziel: In dieser Übung lernen wir die Sattelpunkt-Näherung kennen, eine Methode die es erlaubt, komplizierte Integrale von einer bestimmten Form einfach zu approximieren. Mit der Sattelpunkt-Näherung kann z.B. der Volumenfaktor berechnet werden, der in der halb-klassischen Approximation des Propagators auftaucht (siehe Vorlesungsskript S.25).

Betrachte das Integral

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) e^{-g(x)}\,, \tag{1}$$

wobei wir annehmen, dass $\exp(-g(x))$ ein Maximum bei x_0 besitzt. Unterscheide folgende zwei Fälle:

(i) $f(x)$ ist sehr flach in der Nähe von x_0, und $\exp(-g(x))$ ist nur sehr schmal um x_0 verteilt,

(ii) $f(x)$ hat eine wesentliche Steigung und Krümmung in der Nähe von x_0, und $\exp(-g(x))$ ist nicht unbedingt schmal.

Nähere das Integral (1) in beiden Fälle durch den dominanten Beitrag.

Übung 2. Stern-Gerlach Experiment[1] (1922)

Lernziel: Wir beschäftigen uns mit der Quantisierung des Drehimpulses, indem wir das Stern-Gerlach Experiment genauer untersuchen und die zu erwartenden Ergebnisse für ein klassisches und quantenmechanisches System diskutieren.

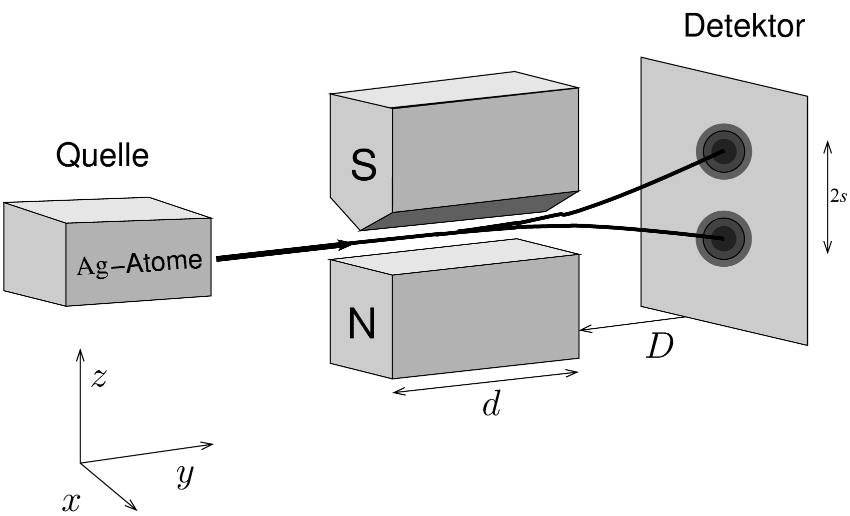

Abbildung 1: Illustration des Stern-Gerlach Experiments. Ein ebener Nord- und ein keilförmiger Südpol erzeugen einen Magnetfeldgradienten entlang z.

Thermisch angeregte Silber-Atome mit magnetischem Moment $\boldsymbol{\mu}$ werden über eine Länge d einem inhomogenen Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ ausgesetzt (siehe Abb. 1). Durch die Wechselwirkung $U = -\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{B}$

[1] W. Gerlach and O. Stern, *Zeitschrift für Physik* **9**, 349-352 (1922)

erfahren die Atome eine Kraft $\boldsymbol{F} = -\nabla U$. Nach der Wechselwirkung fliegen die Atome ballistisch bis zu einem Detektor (Distanz zum Schirm D).

(a) Ermittle die Kraft entlang z, F_z, welche auf die Atome wirkt, und bestimme daraus den Impulsübertrag p_z.

Hinweis: Auf der Symmetrieebene des Magneten ($x =$ konstant) *ist das Magnetfeld entlang z gerichtet,* $\boldsymbol{B} = B_z \hat{\boldsymbol{e}}_z$.

(b) Welche Ablenkung s erfährt ein Atom mit magnetischem Moment $\boldsymbol{\mu}$ bis zum Schirm? Diskutiere das Ergebnis für die Grenzwerte $d \ll D$ und $d \gg D$. Welcher Grenzfall kam im originalen Experiment zum Einsatz?

Hinweis: Beschreibe die Wechselwirkungsregion d und den ballistischen Flug D separat.

(c) Beschreibe das Signal am Detektor für eine kontinuierliche Verteilung der magnetischen Momente $|\mu_z| \leq \mu_{\mathrm{Ag}}$. Wie verändert sich das Signal wenn das magnetische Moment quantisiert ist, d.h. wenn nur die Zustände $\mu_z = \pm\mu_{\mathrm{Ag}}$ erlaubt sind?

(d) Beschreibe qualitativ, was passiert wenn die Atome sukzessiv inhomogenen Feldern mit Gradient entlang z, entlang x und erneut entlang z ausgesetzt werden (y sei die Flugrichtung). Im weiteren Verlauf des Semesters wird dieses Szenario genauer diskutiert werden.

Übung 3. Tunneleffekt

Lernziel: In dieser Übung verwenden wir den Formalismus des Pfadintegrals zur Beschreibung des Tunneleffekts, welcher ein reiner Quanteneffekt ist und klassisch verboten ist. Wir beschränken uns dabei auf die halb-klassische Approximation, die hier schon genügt, um qualitative Aussagen zu machen.

Der Tunneleffekt beschreibt die Propagation eines Teilchens durch eine energetisch verbotene Zone. Ein Teilchen der Energie E kann eine endliche Wahrscheinlichkeitsamplitude $\Psi(x)$ in einem Bereich mit $V(x) > E$ besitzen, es durchdringt demnach die Potentialbarriere.

Die Wahrscheinlichkeitsamplitude für die Propagation eines Teilchens von $a = (t_a, x_a)$ nach $b = (t_b, x_b)$ wird durch den Propagator,

$$K(b,a) = \int_a^b \mathcal{D}\left[x(t)\right]\, e^{\frac{i}{\hbar}S[x(t)]}\,, \tag{2}$$

beschrieben. In der halb-klassischen Approximation schreiben wir den Propagator als Produkt eines Volumenfaktors und eines Phasenfaktors, wobei letzterer via der Wirkung über dem klassischen Pfad evaluiert wird,

$$K_{sc}(b,a) = V(b)\, e^{\frac{i}{\hbar}S[\bar{x}(t)]}\,. \tag{3}$$

Uns interessiert, wie die stationären Zustände (Eigenfunktionen der zeitunabhängigen Schrödingergleichung $H\Psi = E\Psi$) sich qualitativ in der verbotenen Region ($V(x) > E$) verhalten. Dazu benötigen wir den Propagator für feste Energie E, der in der halb-klassischen Approximation gegeben ist durch

$$K_{sc}(x_b, x_a; E) \propto \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{x_a}^{x_b} p(x)\, dx\right)\,, \tag{4}$$

wobei $p(x)$ der Impuls der klassischen Bahn mit Energie E ist.

Nimm an, das Teilchen trifft bei $x_0 = 0$ auf die Potentialbarriere. Berechne $K_{sc}(x, x_0 = 0; E)$, $x > x_0$, für die folgenden Potentiale und verifiziere, dass die Tunnelwahrscheinlichkeit exponentiell mit dem in der Potentialbarriere zurückgelegten Weg abnimmt.

(a) Rechteckspotential:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & x < x_0 \\ V_0, & x \geq x_0 \end{cases} , \quad V_0 > E\,. \tag{5}$$

(b) Allgemeines Potential V(x):
Gehe hier wie folgt vor. Entwickle $V(x)$ bis zur 2. Ordnung um $x_0 = 0$, wobei angenommen werden darf, dass $V(x_0) \equiv E$, und betrachte die beiden Fälle:

(i) $x \gtrsim x_0$
Hinweis: Berücksichtige nur den Kraftterm.

(ii) $x \gg x_0$
Hinweis: Berücksichtige nur die Krümmung des Potentials.

Übung 4. Gaußsches Wellenpaket

Lernziel: In dieser Übung schauen wir uns zwei sehr ähnliche Differentialgleichungen an, die Diffusionsgleichung und die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen. Beide Gleichungen erlauben eine Lösung in der Form eines Gaußschen Wellenpakets. Wir lernen hier die Unterschiede der beiden Gleichungen kennen.

(a) Die Diffusionsgleichung in einer Dimension für ein Temperaturprofil $T(x,t)$ lautet

$$\partial_t T(x,t) = D\, \partial_x^2 T(x,t)\,, \tag{6}$$

wobei D die Diffusionskonstante ist. Die Schrödingergleichung in einer Dimension für ein freies Teilchen ist gegeben durch

$$i\hbar\, \partial_t \Psi(x,t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\, \partial_x^2 \Psi(x,t)\,, \tag{7}$$

wobei m die Masse des Teilchens ist und $\Psi(x,t)$ die Wellenfunktion. Beide Differentialgleichungen sind folglich von der Form

$$\partial_t A(x,t) = \alpha\, \partial_x^2 A(x,t)\,. \tag{8}$$

Löse die Differentialgleichung (8) für beliebiges $\alpha \in \mathbb{C}$. Vergleiche die Lösung mit einer ebenen Welle; was ist die Dispersion $\omega(k)$ in den beiden Fällen?

(b) Da die Differentialgleichung (8) eine lineare Gleichung ist, sind allgemeine Linearkombinationen von Lösungen ebenfalls Lösungen. Im Allgemeinen betrachten wir deswegen ein Wellenpaket, das sich in folgender Form schreiben lässt,

$$A(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk\, g(k) e^{i(kx-\omega(k)t)}\,. \tag{9}$$

Betrachte jetzt ein Gaußsches Wellenpaket, d.h. $g(k)$ ist eine Gauß-Funktion,

$$g(k) = e^{-\frac{1}{4}a^2k^2}\,. \tag{10}$$

Zeige, dass dies tatsächlich eine Lösung der Schrödingergleichung ist. Wie verhält sich die Breite des Pakets als Funktion der Zeit für beide Fälle?