Übung 1. Dirac notation

Lernziel: Practise using the Dirac notation.

1.1. ***Identity operator*** Write down the identity operator for a given set of basis states $|n\rangle$. Also write it down for the position and momentum basis states $|x\rangle$ and $|p\rangle$.

1.2. ***Observables*** Given an observable A with spectrum A_n and basis states $|n\rangle$ write down the operator $\hat{A}$ in Dirac notation.

1.3. ***Expanding in a basis*** Expand $|x\rangle$ in position and momentum basis states, do the same for $|p\rangle$.

1.4. ***Representation*** Write down a general state $|\psi\rangle$ in position representation and then expand it in the position basis $|x\rangle$.

1.5. ***A simple example*** Given $\langle x|\psi\rangle = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{1/4}} e^{-x^2/(4\sigma^2)}$ expand $|\psi\rangle$ in the momentum basis $|p\rangle$.

Übung 2. Zeitumkehr und Parität in der Streumatrix

Lernziel: Bei Streuexperimenten äussern sich gewisse Symmetrien durch eine besondere Struktur der S-Matrix. Es wird hier die Zeitumkehr und Paritätstransformation betrachtet.

Die Streumatrix verbindet die einfallenden mit den auslaufenden Amplituden via

$$\Psi_{\text{out}} = \begin{pmatrix} b \\ A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ B \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} a \\ B \end{pmatrix} = S\ \Psi_{\text{in}}. \tag{1}$$

(a) Zeige, dass die Beziehung $t = t'$ gilt, falls das Streuexperiment zeitumkehrinvariant ist.

Hinweis: Zeige zuerst, dass für zeitumkehrinvariante Systeme mit $\psi(x,t)$ sogleich auch $\psi^*(x,t)$ eine Lösung der Schrödingergleichung ist.

(b) Zeige, dass für ein symmetrisches Streupotential (Parität) die Beziehung $r = r'$ gilt.

(c) Diagonalisiere schlussendlich die Streumatrix S eines zeitumkehr- und paritätsinvarianten Systems.

Übung 3. Heisenbergsche Unschärferelation für allgemeine Observablen.

Lernziel: Die bekannte Heisenbergsche Unschärferelation betrifft die spezifischen Observablen x und p. Wir beweisen eine allgemeinere Form der Unschärferelation, die für ein beliebiges Paar von Observablen gilt.

Seien A und B zwei Observablen. Die Standardabweichung der Observable A (bzw. B) bezüglich einem Zustand $|\psi\rangle$ ist gegeben durch $\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle}$. Zeige die allgemeine Unschärferelation

$$\Delta A \cdot \Delta B \geqslant \frac{1}{2} |\langle i\,[A, B]\,\rangle|. \tag{2}$$

Hinweise: *Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für zwei Zustände $|\phi\rangle$ und $|\chi\rangle$ lautet*

$$|\langle \phi | \chi \rangle|^2 \leqslant \langle \phi | \phi \rangle \langle \chi | \chi \rangle. \tag{3}$$

Zeige die Relation (2) zuerst für Observablen A und B deren Erwartungswerte verschwinden, d.h. $\langle A \rangle = \langle B \rangle = 0$. Leite nun die allgemeine Beziehung aus diesem Spezialfall her.

Übung 4. Strom und Impuls

Lernziel: In dieser Übung lernen wir mehr über die Stromdichte und ihre Abhängigkeit von der Wellenfunktion.

Sei $\hbar = 2m = 1$. Ein Teilchen auf der Geraden hat

$$j(x) = 2\Im \overline{\psi(x)} \psi'(x)$$

als Erwartungswert des Stroms bei x. Es handelt sich um eine lokale Eigenschaft von $\psi(x)$, im Unterschied zu jenem des Impulses $p = k$. Falls $\psi(x) = |\psi(x)| e^{i\phi(x)}$, zeige dass $j(x)$ proportional zu $\partial_x \phi(x)$ ist.

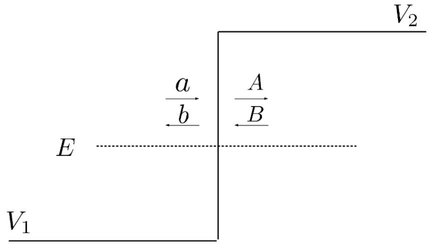
Übung 5. Transfermatrix Formalismus.

Lernziel: In dieser Aufgabe wird gezeigt, wie die behandelte eindimensionale Potentialstufe aus Kapitel 3.3 im Skript zu einem nützlichen Formalismus zur Betrachtung allgemeiner, stückweise stetiger Potentiale erweitert werden kann. Wir werden sehen, dass sich die Propagation eines Teilchens durch ein solches Potential mit einfacher Matrizenmultiplikation der komplexen Amplituden beschreiben lässt.

Zuerst betrachten wir nochmals ein Teilchen der Energie E an einer Potentialstufe,

$$V(x) = \begin{cases} V_1 & \text{falls } x < 0 \\ V_2 & \text{falls } x \geq 0, \end{cases} \tag{4}$$

mit $V_1 < V_2$ (siehe Skizze).



Skizze zur Potentialstufe für den Fall $V_1 > E > V_2$.

Wir setzen die Wellenfunktion links und rechts der Potentialstufe folgendermassen an:

$$\psi(x) = \begin{cases} ae^{\lambda_1 x} + be^{-\lambda_1 x} & \text{falls } x < 0 \\ Ae^{\lambda_2 x} + Be^{-\lambda_2 x} & \text{falls } x \geq 0, \end{cases} \tag{5}$$

wobei wir gesehen haben, dass λ_i reelle oder komplexe Werte annimmt, je nachdem ob $E < V_i$ oder $E > V_i$ gilt.

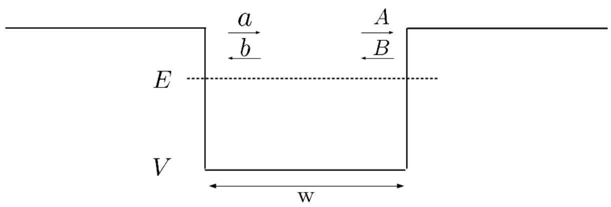
(a) Die Amplituden a, b hängen linear von den Amplituden A, B ab,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \tag{6}$$

wobei $M \in \mathrm{M}(2 \times 2, \mathbb{C})$. Benutze die üblichen Stetigkeitsbedingungen an der Sprungstelle um die Koeffizienten von M für die Fälle $E < V_1$, $V_1 < E < V_2$ und $V_2 < E$ zu bestimmen. Was passiert wenn $V_1 < E < V_2 \to \infty$?

(b) Sei nun $V_1 > V_2$. Gib wiederum die Koeffizienten von M für die genannten 3 Fälle an.

(c) Nun fehlen noch die Matrizen, welche die Propagation im konstanten Potential zwischen den Sprungstellen beschreiben. Wir betrachten ein über eine Strecke w konstantes Potential V (siehe Skizze). Wie lauten die Amplituden a, b in Abhängigkeit von A, B? Unterscheide die Fälle $E > V$ und $E < V$.



Skizze zur Propagation im konstanten Potential, dargestellt für den Fall $E > V$.

(d) Benutze deine Resultate um die Transfermatrix für das folgende Potential,

$$V(x) = \begin{cases} V & x < -w/2 \\ 0 & -w/2 \leq x < w/2 \\ V & x \geq w/2 \end{cases} \tag{7}$$

im Fall $0 < E < V$ auszurechnen.

(e) Finde das Spektrum für das Potential in (d). Was ist die Beziehung zwischen diesen Spektrum und der Matrix aus (d)?