Übung 1. Rotationen

Lernziel: Rotationen und ihre infinitesimalen Erzeugenden sind bereits aus der Mechanik und Elektrodynamik bekannt. Das Ziel dieser Aufgabe ist den Zusammenhang mit den neuen Resultaten der Quantenmechanik zu diskutieren.

1.1. *Rotationen in* $\mathbb{R}^3$

Wir betrachten zunächst die bekannten Rotationen in $\mathbb{R}^3$, die durch orthogonale 3×3 Matrizen dargestellt werden.

(a) Gib die drei infinitesimalen Erzeugenden L_x^{mech}, L_y^{mech} und L_z^{mech} für Rotationen in $\mathbb{R}^3$ an.

(b) Wie erhält man aus den infinitesimalen Erzeugenden die aktive[1] Rotationsmatrix $R_{\boldsymbol{\omega}}$, die einen Vektor in $\mathbb{R}^3$ um die Drehachse $\boldsymbol{\omega}$ mit dem Drehwinkel $|\boldsymbol{\omega}|$ dreht?

(c) Gib die Rotationsmatrix $R_z(\theta)$ einer Drehung um die z-Achse mit Winkel θ an.

1.2. *Rotationen im Hilbertraum* $\mathcal{H}$

Der Rotationsoperator $U_{\boldsymbol{\omega}}$ dreht die Wellenfunktion $\Psi(\boldsymbol{r})$ aktiv um $\boldsymbol{\omega}$ im Hilbertraum $\mathcal{H}$,

$$U_{\boldsymbol{\omega}}\Psi(\boldsymbol{r}) = \Psi(R_{\boldsymbol{\omega}}^{-1}\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

$$\text{bzw.} \quad \langle \boldsymbol{r}|U_{\boldsymbol{\omega}}|\Psi\rangle = \langle R_{\boldsymbol{\omega}}^{-1}\boldsymbol{r}|\Psi\rangle\,. \tag{2}$$

(a) Was ist die infinitesimale Erzeugende der Rotation $U_{\boldsymbol{\omega}}$ im Hilbertraum?

(b) Wie erhält man aus der infinitesimalen Erzeugenden den Rotationsoperator $U_{\boldsymbol{\omega}}$?

(c) Gib die infinitesimale Erzeugende in der $l = 1$ Darstellung an.

(d) Sei $\hat{\boldsymbol{n}}$ ein normierter Vektor und $\hat{\boldsymbol{n}}' = R_{\boldsymbol{\omega}}\hat{\boldsymbol{n}}$. Dann gilt

$$\langle \hat{\boldsymbol{n}}'| = \langle R_{\boldsymbol{\omega}}\hat{\boldsymbol{n}}| = \langle R_{-\boldsymbol{\omega}}^{-1}\hat{\boldsymbol{n}}| = \langle \hat{\boldsymbol{n}}|U_{-\boldsymbol{\omega}}\,. \tag{3}$$

Zeige die Transformation

$$Y_{1m}^*(\hat{\boldsymbol{n}}') = \sum_{m'=-1}^{1} D^{l=1}(\boldsymbol{\omega})_{mm'}\,Y_{1m'}^*(\hat{\boldsymbol{n}})\,, \tag{4}$$

wobei

$$D^{l=1}(\boldsymbol{\omega})_{mm'} \equiv \langle 1, m|e^{-i\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}/\hbar}|1, m'\rangle\,, \tag{5}$$

und

$$Y_{1m}(\hat{\boldsymbol{n}}) = \langle \hat{\boldsymbol{n}}|1, m\rangle\,. \tag{6}$$

(e) Ausgehend von den infinitesimalen Erzeugenden in der $l = 1$ Darstellung, leite mit Hilfe von (4) die infinitesimalen Erzeugenden L_x^{mech}, L_y^{mech} und L_z^{mech} für aktive Rotationen in $\mathbb{R}^3$ her, d.h. bestätige dein Ergebnis aus Aufgabe 1.1 a).

[1] Eine *aktiven* Rotation dreht den Vektor oder das physikalische System im Gegenuhrzeigensinn, während das Koordinatensystem festgehalten wird. Eine *passive* Rotation dagegen dreht das Koordinatensystem.

Übung 2. Radialteil des Laplace-Operators

Lernziel: Der Laplace-Operator nimmt ein besondere Form in Kugelkoordinaten an, welcher die Schrödingergleichung zu einer nichttrivialen Differentialgleichung macht. Wir lernen, wie sich diese Gleichung mithilfe eines passenden Ansatzes in 3D sowie in 2D vereinfacht.

Der Laplaceoperator Δ kann in einen Radialteil und einen Winkelteil separiert werden,

$$\Delta = \Delta_r + \Delta_l \,. \tag{7}$$

(a) Zeige, dass der Radialteil in n Dimensionen gegeben ist durch

$$\Delta_r^{\mathrm{nD}} = \left(\partial_r^2 + \frac{\dim - 1}{r} \partial_r \right) \,. \tag{8}$$

Hinweis: Betrachte eine Funktion $f = f(r)$, die nur vom Radius r abhängt.

(b) Ausgehend von $\Delta_r^{3\mathrm{D}} = \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r\right)$, zeige folgende weitere Ausdrücke für den Radialteil in 3D,

$$\begin{aligned} \Delta_r^{3\mathrm{D}} &= \frac{1}{r^2}\left[(r\partial_r)^2 + r\partial_r\right] && (9) \\ &= \left(\frac{1}{r}\partial_r r \partial_r + \frac{1}{r}\partial_r\right) && (10) \\ &= \left(\frac{1}{r}\partial_r r\right)^2 && (11) \\ &= \left(\frac{1}{r}\partial_r^2 r\right) && (12) \\ &= \frac{1}{r^2}\partial_r r^2 \partial_r \,. && (13) \end{aligned}$$

(c) Nutze den Ansatz $R(r) = u(r)/r^\alpha$ und berechne $\Delta_r^{3\mathrm{D}} R(r)$. Für welches α vereinfacht sich dieser Ausdruck?

(d) Der Winkelteil der Laplaceoperators ist in 3D gegeben durch

$$\Delta_l^{3\mathrm{D}} = \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\partial_\varphi^2 + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\partial_\theta\left(\sin\theta\partial_\theta\right) \,. \tag{14}$$

Berechne Δ_l in 2D.

Im Folgenden betrachten wir den Laplace-Operator in 2 Dimensionen. In diesem Fall lässt sich der Radialteil schreiben als

$$\Delta_r^{2\mathrm{D}} = \left(\partial_r^2 + \frac{1}{r}\partial_r \right). \tag{15}$$

(e) Berechne $\Delta_r^{2\mathrm{D}} R(r)$ mit dem gleichen Ansatz wie im b). Kann man den Ausdruck wie für den 3D-Fall vereinfachen? Für welche α verschwinden alle Terme proportional zu $u' = \partial_r u$?

(f) Vereinfache die Besselgleichung,

$$r^2 \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + r \frac{dR(r)}{dr} + (r^2 - \nu^2) R(r) = 0, \tag{16}$$

mit dem Ansatz aus (b) und bestimme die Asymptotik der Besselfunktionen für $r \to \infty$.

Übung 3. 2D Potentialtopf und marginal gebundene Zustände

Lernziel: Physikalische Effekte hängen von der Dimension ab, in welcher sie auftreten. Experimentell sind 2D oder 1D relevant, wenn Quantenobjekte (z.B. Elektronen) in einer oder zwei Dimensionen eingeschränkt werden, so dass sie sich nur noch in gewisse Richtungen bewegen können. Für den 2D Potentialtopf studieren wir die gebundenen Zustände und lernen, dass ein schwaches, attraktives 2D Potential immer einen marginal gebundenen Zustand besitzt.

Wir betrachten ein rotationssymmetrisches, attraktives Potential der Form

$$V(\boldsymbol{r}) = -V_0\,\Theta(r_0 - |\boldsymbol{r}|)\,, \tag{17}$$

mit $V_0 > 0$. Wir konzentrieren uns in dieser Aufgabe auf das Spektrum der gebundenen Zustände mit negativer Energie $E < 0$.

(a) Betrachte die Schrödingergleichung in 2D in Polarkoordinaten und finde die transzendente Gleichung, welche die Energien der gebundenen Zustände bestimmt.

(b) Führe die dimensionslosen Grössen $\xi_0 = \sqrt{2mV_0}r_0/\hbar$ und $\epsilon = E/V_0$ ein und löse die transzendente Gleichung numerisch, um das Spektrum der gebundenen Zustände als Funktion der dimensionslosen Potentialstärke ξ_0 zu bestimmen.

(c) Betrachte den Fall infinitesimaler Potentialstärke $\xi_0 \ll 1$ und zeige, dass immer ein gebundener Zustand existiert. Wieso bezeichnet man diesen Zustand als *marginal* gebunden?