Übung 1. Harmonischer Oszillator in drei Dimensionen

Lernziel: Wir haben den harmonischen Oszillator schon einige Male angetroffen. In dieser Übung behandeln wir ihn in drei Dimensionen und diskutieren die Entartungen der Energiewerte im Falle eines isotropen Potentials.

Betrachte den anisotropen harmonischen Oszillator gegeben durch das Potential

$$V(x) = \frac{m}{2}\left(\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2 x_2^2 + \omega_3^2 x_3^2\right) \ . \tag{1}$$

(a) Bestimme die Energieeigenwerte durch Lösen der zeitunabhängigen Schroödingergleichung.

(b) Zeige, dass für Energien $E \gg \hbar\omega_i$ die Zustandsdichte approximiert werden kann durch

$$g(E) \approx \frac{E^2}{2\,\hbar^3\omega_1\omega_2\omega_3} \ . \tag{2}$$

Hinweis: Berechne erst die Zahl der Zustände mit Energie $< E$ und leite dann nach E ab.

(c) Bestimme die Entartung der Energieeigenwerte im Falle eines isotropen Potentials, d.h., wenn $\omega_i = \omega$.

(d) Eine Entartung der Energieeigenwerte rührt häufig von einer Symmetrie her. Das isotrope Potential ist offensichtlich rotationssymmetrisch. In welche irreduzible Darstellungen der Drehgruppe $SO(3)$ zerfällt ein Energieeigenraum zum Eigenwert E?

Hinweis: Verwende, dass die Raumspiegelung eine Symmetrie des Potentials ist. WElchen Drehimpulsen entsprechen Zustände gerader (ungerader) Parität?

Übung 2. Streuung an der harten Kugel

Lernziel: Die Konzepte der (drehimpulsabhängigen) Streuphasen δ_l und Streuquerschnitte σ_l wurden in der Vorlesung eingeführt. Mache dich anhand der folgenden Aufgaben mit diesen neuen Grössen vertraut.

Wir betrachten ein hartes Streuzentrum gegeben durch das Potential

$$V(r) = \begin{cases} \infty, & r \leq r_0 \\ 0, & r > r_0. \end{cases} \tag{3}$$

(a) Berechne die Streuphasen δ_0 und δ_1. Skizziere die radiale Wellenfunktion für $l = 0$ in Abhängigkeit von $\rho_0 = kr_0$.

(b) Berechne den totalen Streuquerschnitt σ im Limes kleiner Einfallsenergien ($\rho_0 \ll 1$) bis zur Ordnung $O(\rho_0^4)$. Warum kann man die Partialwellen mit grossen l vernachlässigen? Was erwartet man für den totalen Streuquerschnitt im klassischen Fall?

Übung 3. Das Teilchen im 3D-Topf

Lernziel: In dieser Übung repetieren wie das Teilchen im 3D-Topf welches im Skript in Kapitel 5.2 behandelt wurde.

Wir betrachten ein Potential $V(r) = V_0\Theta(r_0 - r) + V_1(r - r_0)$, d.h. innerhalb von einem Radius r_0 haben wir $V = V_0$ und ausserhalb $V = V_1$. Wie wir in der Vorlesung gesehen haben berechnet sich die Energie des Grundzustands für $V_1 \to \infty$ als $E_\infty = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mr_0^2} + V_0$.

(a) Wir nehmen an dass dies für alle Werte von V_1 gilt (also nicht nur im Limit $V_1 \to \infty$). Setze $V_1 = 0$ und berechne die Bindungsenergie V_0.

(b) Berechne die Bindungsenergie V_0 exakt.

Hinweis: Folge dem Skript Kapitel 5.2.

(c) Erkläre den Unterschied zwischen den Lösungen von Teilaufgabe (a) und (b).