Übung 1. Bound states and the cross section

Lernziel: The scattering phase is a result of the properties of the scattering potential. Here we remind ourselves about it and rederive a simple formula from the script.

Reread chapter 6.4.3, Analyticity of $s_l(E)$, in the script and make sure you understand it.

(a) Derive the following equation for the scattering phase:

$$s_l = 1 + \frac{2i}{\cot(\delta_l) - i} \tag{1}$$

Übung 2. Geometrical interpretation of the scattering length

Lernziel: In class we have calculated the scattering length, here we will familiarise ourselves with it. There is a very simple geometric interpretation of the scattering length in terms of the wavefunction which we will investigate.

Consider a finite spherically symmetric potential, meaning that $V = 0$ for $r > r_0$ and $V(\mathbf{r}) \equiv V(r)$. In class we defined the parameter α as a short hand when dealing with boundary conditions of this kind of potentials:

$$\alpha_l = \frac{1}{R_l}\frac{\partial R_l}{\partial r}\bigg|_{r_0}. \tag{2}$$

Here $R_l = u_l/r$ is the radial wavefunction and r_0 is the range of the potential. We have also seen that the scattering length is then given by:

$$-\frac{1}{a} = \lim_{k\to 0} k\cot\delta_0 = \lim_{k\to 0} k\frac{(\partial_r - \alpha_0)n_0(kr)}{(\partial_r - \alpha_0)j_0(kr)}\bigg|_{r_0}. \tag{3}$$

With j_l and n_l the spherical Bessel functions.

(a) Show that this is equivalent to writing

$$-\frac{1}{a} = \lim_{k\to 0} k\cot\delta_0 = \lim_{k\to 0} k\frac{(\partial_r - \gamma_0)rn_0(kr)}{(\partial_r - \gamma_0)rj_0(kr)}\bigg|_{r_0} \tag{4}$$

where

$$\gamma_l = \frac{1}{u_l}\frac{\partial u_l}{\partial r}\bigg|_{r_0}. \tag{5}$$

(b) In the limit $x \to 0$ the spherical Bessel function are given by

$$j_l(x) = \frac{x^l}{(2l+1)!!} \tag{6}$$

$$n_l(x) = -\frac{(2l-1)!!}{x^{l+1}}. \tag{7}$$

Use these approximations to find a geometrical interpretation for the scattering length in terms of u.

Übung 3. Streulängen

Lernziel: Die ganze Streuphysik bei niedrigen Energien lässt sich durch eine einzige Grösse, die Streulänge a, beschreiben. Der Nutzen dieser Einparameterbeschreibung wird ersichtlich, wenn man erkennt, dass sich ein beliebiges Streupotential $V(r)$ durch ein (universelles) effektives Potential $V_{\text{eff}}(a, r)$ beschreiben lässt.

Wir betrachten in dieser Aufgabe Streuung von Wellenfunktionen mit kleiner Energie ($k \to 0$) an einem Potential $V(r)$. In diesem Zusammenhang wird oft eine Streulänge a wie folgt definiert

$$\lim_{k\to 0} k \cot(\delta_0) = -\frac{1}{a}, \tag{8}$$

wobei δ_0 die Streuphase für s-Wellen Streuung ist.

(a) Zeige, dass für das Potential einer harten Kugel mit Radius r_0 (c.f. Aufg. 2 Übungsblatt 10) $a = r_0$ gilt.

(b) Zeige dass im Limes kleiner Energien der totale Wirkungsquerschnitt gegeben ist durch $\sigma = 4\pi a^2$.

(c) Argumentiere anhand von (6.58) das $a > 0$ ($a < 0$) für ein schwach repulsives (attraktives) Potential gilt. Zeige, dass a gleich der Nullstelle der asymptotischen Funktion $u^\infty \sim (\sin(kr) + \tan(\delta_0)\cos(kr))/k$ im Limes $k \to 0$ ist, und skizziere u und u^∞ für ein schwach attraktives und repulsives Potential.

(d) Ähnlich wie man in der Elektrostatik beliebige Ladungsverteilungen durch eine Punktladung ersetzen kann, falls man weit genug weg ist, wollen wir auch hier zeigen, dass man ein beliebiges Potential V durch ein Pseudopotential V_{eff} ersetzen kann, falls die Energie des gestreuten Teilchens klein genug ist. Zeige, dass dieses Potential für $k \to 0$ gegeben ist durch

$$V_{\text{eff}} = \frac{\hbar^2 a}{2m} 4\pi \delta^{(3)}(\vec{r})\partial_r r, \tag{9}$$

was in diesem Limes äquivalent zur Streuung an einer harten Kugel mit Radius a ist.

Übung 4. Streulänge für den sphärischen Potentialtopf

Lernziel: Die niederenergetische Streuphysik eines sphärischen Potentialtopfes kann exakt gelöst werden. Dabei stellt sich heraus, dass das attraktive Potential meistens repulsiv wirkt, d.h. ein Streuzustand wird durch die gebundenen Zustände im Topf abgestossen. Nur für präzise gewählte Potentialtiefen (kurz bevor ein neuer Zustand gebunden wird) wirkt das Potential attraktiv.

Wir betrachten einen sphärischen (3D) Potentialtopf der Tiefe $V_0 < 0$ und mit Radius r_0

$$V(r) = \begin{cases} V_0, & r \le r_0 \\ 0, & r > r_0. \end{cases} \tag{10}$$

Die Stärke des Potential ist durch die dimensionslose Grösse $\chi_0 = \text{sgn}(V_0)\sqrt{2m|V_0|r_0^2}/\hbar$ parametrisiert. Wir wollen die niederenergetischen Streuzustände dieses Potentials charakterisieren. Dazu untersuchen wir das Verhalten der Streulänge $a(\chi_0)$ in Abhängigkeit der Potentialstärke.

(a) Wie verhält sich die Streulänge falls der Topf einen gebundenen Zustand nahe bei $E = 0$ besitzt? Berechne a und zeige wie sich die Streulänge in diesem Fall mit der Bindungsenergie in Verbindung bringen lässt.

(b) Die Streulänge $a(\chi_0)$ lässt sich für jede Stärke dieses Potentials exakt berechnen. Bestimme $a(\chi_0)$ und erweitere das Resultat für einen abstossenden Potentialtopf $V_0 > 0$.