Übung 1. Density matrix and the Bloch sphere

Lernziel: We learn how to represent pure and mixed states using Bloch sphere representation

(a) Prove that

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \tag{1}$$

where $|\boldsymbol{n}| \leq 1$ and $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ is a vector of Pauli matrices, satisfies the definition of a density matrix. We can see these states as lying on or inside the Bloch sphere, with vector $\boldsymbol{n}$ being their position vector in spherical coordinates.

(b) For which vectors $\boldsymbol{n}$ does ρ represent pure states? Where are these states on the Bloch sphere?

(c) For which vectors $\boldsymbol{n}$ does ρ represent mixed states? Where is the maximally mixed state in the Bloch sphere representation?

Übung 2. Dichtematrix und Wahrscheinlichkeiten

Lernziel: Wir lernen den Umgang mit Dichtematrizen durch ein paar Beispiele besser kennen.

Finde die Dichtematrix folgender Zwei-Niveau Systeme in der Basis $|0\rangle = \left(\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right)$, $|1\rangle = \left(\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right)$:

(a) Ein System präpariert im Zustand $|1\rangle$;

(b) Ein System präpariert im Superposition Zustand $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - i\,|1\rangle)$;

(c) Ein System, zufällig präpariert im Zustand $|0\rangle$ oder $|1\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit 1/2;

(d) Ein System, zufällig präpariert im Zustand $|+\rangle$ oder $|-\rangle$ mit Wahrscheinlichkeit 1/2, wobei $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$;

Jetzt haben wir ein System im Zustand $|\phi\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle$; Was ist die Dichtematrix ρ? Finde die Dichtematrix folgender Zwei-Niveau Systeme:

(e) Das System ρ nach einer Messung in der Basis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, die das Resultat $|0\rangle$ ergeben hat;

(f) Das System ρ, nachdem jemand anders einer Messung in der Basis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ durchgeführt hat, aber dir das Messresultat nicht mitgeteilt hat.

Finde diese Zustand an die Bloch sphere.

Übung 3. Drehimpulsaddition

Lernziel: Diese Aufgabe repetiert die Drehimpulsaddition welche im Skript in Kapitel 11.3 behandelt wird.

Betrachte ein Atom mit Kernspin $I = 4$ sowie ein Elektron im d-Orbital (d.h. $l = 2$) (ignoriere alle anderen Elektronen, die sich in gefüllten Orbitalen befinden). Bestimme die möglichen Werte des Gesamtdrehimpulses und die zugehörigen Multiplizitäten.

Übung 4. Quantenteleportation

Lernziel: Entanglement (Verschränkung) ist eine einzigartige Eigenschaft der Quantenmechanik, welche einerseits fundamental interessant ist, aber auch viele Anwendungen findet. In dieser Aufgabe sehen wir, wie Entanglement zwischen zwei Teilchen für ein Quantenteleportationsprotokoll benutzt werden kann.

Alice besitzt ein Spin-$1/2$ Teilchen in einem unbekannten Zustand $|\phi_1\rangle$. Sie möchte Bob diesen Zustand senden, darf aber nur klassisch mit Bob kommunizieren, d.h. sie darf Bob nur klassische Bits mitteilen. Wir nehmen nun an, dass Alice und Bob je ein Spin-$1/2$ Teilchen eines EPR-Paars besitzen, das sie bei einem früheren Treffen ausgetauscht haben.

In dieser Übung wird gezeigt, dass Alice diese "Quantenteleportation" ausführen kann. Historisch wurde dieses Protokoll 1993 von Charles Bennett et al. entdeckt[1]. Diese Übung folgt der Notation dieses Originalpapers.

Der Zustand des EPR-Paars lässt sich in folgender Form schreiben:

$$|\Psi_{23}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|{\uparrow_2}\rangle \, |{\downarrow_3}\rangle - |{\downarrow_2}\rangle \, |{\uparrow_3}\rangle \right) , \tag{2}$$

wobei "2" und "3" die jeweiligen Teilchen von Alice und Bob indizieren. Der unbekannte Zustand von Alice lässt sich als Linearkombination der Basis $|{\uparrow_1}\rangle$, $|{\downarrow_1}\rangle$ schreiben:

$$|\phi_1\rangle = a \, |{\uparrow_1}\rangle + b \, |{\downarrow_1}\rangle , \tag{3}$$

wobei $|a|^2 + |b|^2 = 1$.

Alice misst die Teilchen "1" und "2" (die in ihrem Besitz sind) in der sog. Bellbasis:

$$|\Psi_{12}^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|{\uparrow_1}\rangle \, |{\downarrow_2}\rangle \pm |{\downarrow_1}\rangle \, |{\uparrow_2}\rangle \right) , \quad |\Phi_{12}^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|{\uparrow_1}\rangle \, |{\uparrow_2}\rangle \pm |{\downarrow_1}\rangle \, |{\downarrow_2}\rangle \right) . \tag{4}$$

(a) Schreibe den Zustand $|\psi_{123}\rangle = |\phi_1\rangle \otimes |\Psi_{23}^-\rangle$ des zusammengesetzten Systems in der Bellbasis (4) für die Teilchen "1" und "2" aus. Was sind die Wahrscheinlichkeiten der vier verschiedenen Messresultate? Was ist, für jedes Messresultat, der Zustand nach der Messung? Insbesondere, was ist der Zustand von Bobs Teilchen?

(b) Alice teilt Bob mit, welches Messresultat sie bekommen hat (diese Information wird mit Hilfe von zwei klassischen Bits beschrieben, die sie Bob senden darf). Was kann Bob tun, um den ursprünglichen, Alice unbekannten Zustand $|\phi_1\rangle$ zu rekonstruieren?

[1] Phys. Rev. Lett. **70** 1895 (1993)

(c) There is no reason why the state ϕ_1 cannot be entangled with some other system that Alice and Bob do not control. Think of the case when the particle to teleport on Alice's side is entangled to Charlie's qubit. What will happened with entanglement after the teleportation protocol? Consider a purification of ρ_1 on a reference system R,

$$\rho_1 = \mathrm{tr}_R \left|\phi\right\rangle_{1R} . \tag{5}$$

Show that if you apply the quantum teleportation protocol as before, not touching the reference system, the final state on $H_B \otimes H_R$ will be the same as state $\left|\phi\right\rangle_{1R}$.

This implies that quantum teleportation preserves entanglement — it simply transfers it from 1 and R to B and R.

Hint: Use a Schmidt decomposition of a joint state $\left|\phi\right\rangle_{RS} = \sum_i c_i \left|r_i\right\rangle_R \otimes \left|s_i\right\rangle_S$

Übung 5. Das No-Cloning Theorem

Lernziel: Das No-Cloning Theorem ist ein weiteres Beispiel worin sich die klassische Welt von der quantenmechanischen Welt unterscheidet. In dieser Aufgabe werden wir das Theorem erklären und beweisen. Dieses Theorem ist enorm wichtig (z.B. für die Quantenkryptographie) und ist erstaunlicherweise recht einfach zu beweisen.

Ist es möglich eine Kopie von einem *unbekannten* quantenmechanischen Zustand zu machen? Erstaunlicherweise ist dies nicht möglich! Dies werden wir nun sauber beweisen (über einen Widerspruchsbweis). Dafür formalisieren wir zuerst die Aussage ein wenig:

Wir nehmen an es existiere eine Maschine (eine die Quatenzustände klonen kann) mit zwei Registern A und B. Das Register A (das Datenregister) started mit einem unbekannten reinen Zustand $|\psi\rangle$. Dieser Zustand möchten wir nun in das Register B (das Zielregister) kopieren. Wir nehmen an dass das Register B in einem (beliebigen) Startzustand $|s\rangle$ startet. Der Anfangszustand der Kopiermaschine ist also

$$\left|\psi\right\rangle_A \otimes \left|s\right\rangle_B \ . \tag{6}$$

Wir wissen das Evolutionen durch Unitäre beschrieben werden. Das heisst wir müssen zeigen dass keine Unitäre U existieren kann so dass

$$\left|\psi\right\rangle_A \otimes \left|s\right\rangle_B \xrightarrow{U} U(\left|\psi\right\rangle_A \otimes \left|s\right\rangle_B) = \left|\psi\right\rangle_A \otimes \left|\psi\right\rangle_B \ . \tag{7}$$