Exercise 1. Sattelpunkt-Näherung

Wir betrachten die beiden Fälle separat:

(i) Wir nähern $f(x)$ durch die Konstante $f(x_0)$, da wir annehmen dürfen, dass die Funktion f in der Nähe von x_0 sehr flach ist, und finden

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) e^{-g(x)} \approx f(x_0) \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-g(x)} = V \cdot f(x_0)\ . \tag{S.1}$$

Der Volumenfaktor V enspricht dem Volumen des Peaks von $e^{-g(x)}$. Beachte, dass in dieser Approximation die "Gewichts-Funktion" $\exp(-g(x))$ wie eine δ-Funktion behandelt wird,

$$e^{-g(x)} \sim V \cdot \delta(x - x_0)\,. \tag{S.2}$$

(ii) Wenn $f(x)$ eine Steigung und/oder Krümmung um x_0 hat, ist das Maximum des Produkts $f(x)\exp(-g(x))$ nicht notwendigerweise an der Stelle x_0, sondern ist im Allgemeinen verschoben. Deswegen kann $f(x)$ nicht mehr aus dem Integral gezogen werden. Wir benutzen statdessen die Sattelpunkt-Näherung, welche es erlaubt, Integrale der Form $\int dx\ \exp(-h(x))$ zu nähern.
Wenn $\exp(-h(x))$ genug gepeaked ist, ist der Hauptbeitrag bei $h(\tilde{x}_0)$, wobei $\tilde{x}_0$ die Position des Minimums von $h(x)$ ist. Wenn $h(x)$ eine Breite hat, können wir $h(x)$ bis zur 2. Ordnung entwickeln,

$$h(x) \approx h(\tilde{x_0}) + \frac{1}{2} h''(\tilde{x}_0)(x - \tilde{x}_0)^2\,. \tag{S.3}$$

Die 1. Ordnung verschwindet wegen des Minimums. Der erste Term ist eine Konstante, der zweite liefert ein Gaußsches Integral.
Der Trick ist nun, die Funktion f in den Exponenten zu bringen,

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x) e^{-g(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-g(x) + \ln f(x)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-h(x)}\,. \tag{S.4}$$

Sei jetzt $\tilde{x}_0$ das Minimum von $h(x) = g(x) - \ln f(x)$, d.h. $h'(\tilde{x}_0) = 0$ und $h''(\tilde{x}_0) > 0$. Wir entwickeln $h(x)$ um $\tilde{x}_0$ bis zur 2. Ordnung und finden,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-h(x)} \approx \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-h(\tilde{x}_0) - \frac{1}{2} h''(\tilde{x}_0)(x - \tilde{x}_0)^2} = e^{-h(\tilde{x}_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{h''(\tilde{x}_0)}}\ , \tag{S.5}$$

wobei wir im letzten Schritt nur noch das Gaußsches Integral ausgewerten mussten (siehe Serie 2, Aufgabe 2).
Mit $h(x) = g(x) - \ln f(x)$ bestimmen wir jetzt

$$h'(x) = g'(x) - \frac{f'(x)}{f(x)}\,, \tag{S.6}$$

und

$$h''(x) = g''(x) + \frac{(f'(x))^2}{(f(x))^2} - \frac{f''(x)}{f(x)}\,. \tag{S.7}$$

Dies liefert dann schliesslich,

$$I \approx f(x_0)\, e^{-g(\tilde{x}_0)} \sqrt{\frac{2\pi}{g''(\tilde{x}_0) + \frac{(f'(\tilde{x}_0))^2}{(f(\tilde{x}_0))^2} - \frac{f''(\tilde{x}_0)}{f(\tilde{x}_0)}}}\,. \tag{S.8}$$

Falls $f(x) \approx f(x_0)$ gilt wie im ersten Fall, folgt direkt $\tilde{x}_0 \approx x_0$ und $h''(\tilde{x}_0) \approx g''(x_0)$.

Exercise 2. Stern-Gerlach Experiment

Die Atome mit magnetischem Moment $\boldsymbol{\mu}$ wechselwirken über eine Distanz d (entlang y) mit einem inhomogenen Magnetfeld in z-Richtung, $\boldsymbol{B} = B_z \hat{\boldsymbol{e}}_z$. Somit ist die Wechselwirkungsenergie

$$U = -\mu_z B_z\,. \tag{S.9}$$

(a) Die Atome erfahren eine Kraft

$$F_z = -\partial_z U = \mu_z \partial_z B_z\,, \tag{S.10}$$

und nehmen somit über die Länge d eine kinetische Energie $E_{\mathrm{kin},z} = F_z s_d$ entlang z auf. Hier ist s_d die Strecke welche die Atome im Wechselwirkungsbreich entlang z zurücklegen. Aus der Dispersionsrelation $E_{\mathrm{kin},z} = p_z^2/(2m)$ ergibt sich ein Impulsübertrag

$$p_z = \sqrt{2m\mu_z \partial_z B_z\, s_d}\,. \tag{S.11}$$

(b) Die Wechselwirkungszeit

$$\tau_d = \frac{d}{v_y} = \frac{d}{\sqrt{2E_{\mathrm{kin},y}/m}}\,, \tag{S.12}$$

ergibt sich aus der kinetischen Energie $E_{\mathrm{kin},y} \sim k_B T$ und der Masse m der Atome. Wirkt die konstante Kraft (S.10) auf das magnetische Moment μ_z, erfährt das Atom eine Ablenkung

$$s_d = \frac{1}{2}\frac{F_z}{m}\tau_d^2 = \frac{d}{2}\frac{\mu_z \partial_z B_z d}{2E_{\mathrm{kin},y}} \tag{S.13}$$

im Wechselwirkungsbereich. Danach fliegen die Atome ballistisch eine Strecke D, wobei sich der Impuls entlang z, p_z, aus den Gleichungen (S.11) und (S.13) ergibt und

$$p_y = \sqrt{2mE_{\mathrm{kin},y}}\,. \tag{S.14}$$

Wir finden somit

$$s_D = D\frac{p_z}{p_y} = D\frac{\mu_z \partial_z B_z\, d}{2E_{\mathrm{kin},y}} \tag{S.15}$$

für die ballistische Auslenkung. Die gesamte Auslenkung,

$$s(d, D) = s_d + s_D = \left(\frac{d}{2} + D\right)\frac{\mu_z \partial_z B_z\, d}{2E_{\mathrm{kin},y}}\,, \tag{S.16}$$

ergibt sich dann aus Gln. (S.13) und (S.15). Der Grenzwert $d \ll D$ ($d \gg D$) ergibt sich sofort aus Gl. (S.15) [(S.13)]. Im ursprünglichen Experiment von Otto Stern und Walther Gerlach wurde der Grenzwert $d \gg D$ implementiert.

Bemerkung: Da die Vakuumkammer der Länge L ein limitierender Faktor ist, gilt $d \approx L$ für den Grenzfall $d \gg D$ oder $D \approx L$ für $d \ll D$. Maximiert man die Streulänge $s(d, D = L - d)$ bezüglich d erhält man $d = L$ was das die Umsetzung des Experiments erklärt.

(c) Sind die magnetischen Momente der Silber-Atome kontinuierlich verteilt, d.h. $\boldsymbol{\mu}$ ist ein klassischer dreidimensionaler Vektor, dessen Ausrichtung isotrop ist, erwarten wir auf dem Schirm eine kontinuierliche Verteilung mit einer Ausdehnung $2s$ entlang z, wobei s gegeben ist durch Gl. (S.16) mit $\mu_z = \mu_{\mathrm{Ag}}$. Die Projektion des Moments $\boldsymbol{\mu}$ entlang z erzeugt eine wolkenförmige Verteilung dessen Dichte bei $z = 0$ am höchsten ist und gegen aussen abnimmt.
Sind nur die diskreten Zustände $\mu_z = \pm\mu_{\mathrm{Ag}}$ erlaubt, werden nur zwei Punkte (oder Flecken) auf dem Schirm zu sehen sein, deren Abstand gegeben ist durch $2s$ [vgl. Gl. (S.16) mit $\mu_z = \mu_{\mathrm{Ag}}$]. Bei $z = 0$ treffen keine Atome auf den Schirm.

(d) Wird einer der beiden oben beschriebenen Strahlen durch ein weiteres Magnetfeld (mit Gradient entlang x) geschickt, spaltet sich der Strahl erneut in zwei Strahlen auf. Klassisch erwartet man deshalb, dass eine Selektion des Moments entlang z und x stattgefunden hat. Somit sollte ein weiteres Experiment entlang z keine Strahlteilung erzeugen. Wie wir später in der Vorlesung sehen werden, sind diese sogenannten *Projektionen* entlang x und z nicht kommutativ, wodurch eine Projektion entlang x eine Unschärfe entlang z erzeugt. Dadurch kommt es (beim dritten Magneten mit Grandient entlang z) wieder zu einer Strahlteilung.

Exercise 3. Tunneleffekt

Der Impuls der klassischen Bahn mit Energie E ist gegeben durch

$$p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))}\,. \tag{S.17}$$

(a) Für $x \geq x_0$ finden wir einen komplexen Impuls ($V_0 > E$)

$$p(x) = i\sqrt{2m(V_0 - E)}\,, \tag{S.18}$$

der unabhängig von x ist.
Wir berechnen

$$K_{sc}(x, x_0 = 0; E) \propto \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^x p(x')\,dx'\right) \tag{S.19}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_0^x \sqrt{2m(V_0 - E)}\,dx'\right) \tag{S.20}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(V_0 - E)}\,x\right) \tag{S.21}$$

$$= \exp\left(-\frac{x}{\ell}\right)\,, \quad \ell \equiv \hbar\,\{2m(V_0 - E)\}^{-1/2}\,. \tag{S.22}$$

Im Falle eines konstanten Potentials finden wir somit eine exponentielle Abnahme mit einem linearen Exponenten, $\sim \exp(-x/\ell)$, mit der charakteristischen Länge

$$\ell = \hbar\,\{2m(V_0 - E)\}^{-1/2}\,. \tag{S.23}$$

(b) Wir entwicklen $V(x)$ bis zur 2. Ordnung um $x_0 = 0$ und nehmen an, dass $V(x_0) \equiv E$,

$$V(x) = E + (x - x_0)\frac{dV}{dx}|_{x_0} + \frac{(x - x_0)^2}{2}\frac{d^2V}{dx^2}|_{x_0} + \mathcal{O}\left((x - x_0)^3\right)\,. \tag{S.24}$$

(i) Sei $\partial_x V|_{x_0} = -F$, $F < 0$. Für x nahe bei x_0 können wir die Krümmung des Potentials (Term 2. Ordnung) vernachlässigen. Wir haben also ein lineares Potential, bestehend aus einem konstanten Energieshift und dem Kraftterm,

$$V(x) \approx E - F(x - x_0)\,. \tag{S.25}$$

Der Impuls ist dann gegeben durch

$$p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))} = i\sqrt{-2mF(x - x_0)}\,. \tag{S.26}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
K_{sc}(x, x_0 = 0; E) &\propto \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^x p(x')\,dx'\right\} && \text{(S.27)}\\
&= \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_0^x \sqrt{-2mFx'}\,dx'\right\} && \text{(S.28)}\\
&= \exp\left\{-\frac{2}{3\hbar}\sqrt{-2mF}\,x^{3/2}\right\} && \text{(S.29)}\\
&= \exp\left\{-\left(\frac{x}{\ell}\right)^{3/2}\right\}, \quad \ell \equiv \left(\frac{3\hbar}{2}\right)^{2/3}(-2mF)^{-1/3}\,. && \text{(S.30)}
\end{aligned}$$

Im Falle eines linearen Potentials finden wir somit eine exponentielle Abnahme von $\sim \exp\left\{-(x/\ell)^{3/2}\right\}$ mit der charakteristischen Länge $\ell = \left(\frac{3\hbar}{2}\right)^{2/3}(-2mF)^{-1/3}$.

(ii) Sei $\partial_x^2 V|_{x_0} = m\omega^2$. Für x viel grösser als x_0 können wir den Kraftterm (Term 1. Ordnung) vernachlässigen, da er viel kleiner ist als die Krümmung des Potentials (Term 2. Ordnung). Wir haben also ein quadratisches Potential,

$$V(x) \approx E + \frac{1}{2}m\omega^2(x - x_0)^2\,. \tag{S.31}$$

Der Impuls ist dann gegeben durch

$$p(x) = \sqrt{2m(E - V(x))} = i\sqrt{m^2\omega^2(x - x_0)^2} = im\omega(x - x_0)\,. \tag{S.32}$$

Wir berechnen

$$\begin{aligned}
K_{sc}(x, x_0 = 0; E) &\propto \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^x p(x')\,dx'\right\} && \text{(S.33)}\\
&= \exp\left\{-\frac{1}{\hbar}\int_0^x m\omega\,x'\,dx'\right\} && \text{(S.34)}\\
&= \exp\left\{-\frac{1}{2\hbar}m\omega\,x^2\right\} && \text{(S.35)}\\
&= \exp\left\{-\frac{x^2}{2\ell^2}\right\}, \quad \ell \equiv \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,. && \text{(S.36)}
\end{aligned}$$

Im Falle eines quadratischen Potentials finden wir somit eine exponentielle Abnahme von $\sim \exp\left\{-x^2/\left(2\ell^2\right)\right\}$ mit der charakerisitischen Länge $\ell = \sqrt{\hbar/(m\omega)}$.

Zusammenfassed erhalten wir folgendes Verhalten,

$$\begin{aligned}
V(x) &\sim V_0 > E && \to \quad K_{sc}(x, 0; E) \propto \exp\{-x/\ell\} && \text{(S.37)}\\
V(x) &\sim -Fx && \to \quad K_{sc}(x, 0; E) \propto \exp\left\{-(x/\ell)^{3/2}\right\} && \text{(S.38)}\\
V(x) &\sim \frac{1}{2}m\omega^2x^2 && \to \quad K_{sc}(x, 0; E) \propto \exp\left\{-x^2/\left(2\ell^2\right)\right\}\,. && \text{(S.39)}
\end{aligned}$$

Exercise 4. Gaußsches Wellenpaket

(a) Die Differentialgleichung $\partial_t A(x,t) = \alpha\, \partial_x^2 A(x,t)$ erlaubt eine separable Lösung, d.h. wir wählen den Ansatz $A(x,t) = \chi(x)\phi(t)$. Dies ergibt

$$\chi(x)\, \partial_t\, \phi(t) = \alpha\, \phi(t)\, \partial_x^2\, \chi(x)\,. \tag{S.40}$$

Wir bringen jetzt alle t-Abhängigkeit auf eine Seite dieser Gleichung und x-Abhängigkeit auf die andere,

$$\frac{\partial_t\, \phi(t)}{\phi(t)} = \alpha \frac{\partial_x^2\, \chi(x)}{\chi(x)}\,. \tag{S.41}$$

Da sich x und t unabhängig von einander variieren lassen, müssen beide Seiten dieser Gleichung denselben konstanten Wert annehmen. Wir wählen $-\lambda$ für diese Konstante, mit $\lambda > 0$ (mit $\lambda \leq 0$ findet man keine gültige Lösung). Das ergibt für $\phi(t)$,

$$\partial_t\, \phi(t) = -\lambda\phi(t) \quad \to \quad \phi(t) \sim e^{-\lambda t}\,, \tag{S.42}$$

und für $\chi(x)$,

$$\partial_x^2\, \chi(x) = -\frac{\lambda}{\alpha}\chi(x) \quad \to \quad \chi(x) \sim e^{i\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x}\,. \tag{S.43}$$

Eine Lösung ist also gegeben durch

$$A(x,t) = e^{i(\sqrt{\frac{\lambda}{\alpha}}x + i\lambda t)}\,. \tag{S.44}$$

Wenn wir das mit einer ebenen Welle vergleichen,

$$E(x,t) = e^{i(kx-\omega(k)t)}\,, \tag{S.45}$$

sehen wir, dass die Dispersion gegeben ist durch $\omega = -i\alpha k^2$.

(b) Für die Schrödingergleichung ist $\alpha = i\hbar/(2m)$ und somit $\omega(k) = \hbar k^2/(2m)$. Wir verfizieren, dass das Wellenpaket in der Tat eine Lösung der Schrodingergleichung ist:

$$\begin{aligned} i\hbar\, \partial_t A(x,t) &= i\hbar \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk\, g(k)(-i\omega(k))e^{i(kx-\omega(k)t)} && \text{(S.46)}\\ &= \hbar \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk\, g(k) \frac{\hbar k^2}{2m} e^{i(kx-\omega(k)t)} && \text{(S.47)}\\ &= -\frac{\hbar^2}{2m}\partial_x^2 A(x,t)\,. && \text{(S.48)} \end{aligned}$$

Weiter berechnen wir

$$\begin{aligned} A(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk\, g(k) e^{i(kx-\omega(k)t)} && \text{(S.49)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk\, e^{-\frac{1}{4}a^2k^2 + i(kx + i\alpha k^2 t)} && \text{(S.50)}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk\, e^{-(\frac{1}{4}a^2 + \alpha t)k^2 + ikx} && \text{(S.51)}\\ &= \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}a^2 + 2\alpha t}}\, e^{\frac{-x^2}{2(\frac{1}{2}a^2 + 2\alpha t)}} && \text{(S.52)}\\ &= \frac{1}{w} e^{\frac{-x^2}{2w^2}}\,, && \text{(S.53)} \end{aligned}$$

wobei $w = \sqrt{\frac{1}{2}a^2 + 2\alpha t}$. Die Breite des Pakets lässt sich jetzt einfach bestimmen. Die Breite einer Gaußschen Verteilung, $\exp\left(-x^2/2\sigma^2\right)$, ist gegeben durch σ, für σ reell. Für die Diffusionsgleichung mit $\alpha = D$ finden wir direkt

$$\Delta x = w \sim \sqrt{t}\,. \tag{S.54}$$

Für die freie Schrödingergleichung brauchen wir einen zusätzlichen Schritt, da $\alpha = i\hbar/(2m)$ (und damit w) komplex ist:

$$A(x,t) = \Psi(x,t) \to |\Psi(x,t)|^2 = \frac{1}{|w|^2} e^{\frac{-a^2x^2}{2|w^2|^2}} \tag{S.55}$$

wobei $|w|^2 = \sqrt{\frac{1}{4}a^4 + \frac{\hbar^2 t^2}{m}}$ und $|w^2|^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{\hbar^2 t^2}{m}$. Das quantenmechanische Gaußsche Wellenpaket breitet sich also aus wie

$$\Delta x \sim t\,. \tag{S.56}$$