Übung 1. Der Aharonov-Bohm-Effekt

(a) Im Gebiet G verschwindet das Magnetfeld, somit kann dort das Vektorpotential als Gradientenfeld $\boldsymbol{A} = \nabla\Lambda$ geschrieben werden mit

$$\Lambda(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}} \mathrm{d}\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}). \tag{L.1}$$

Die Wellenfunktion ψ_B findet man aus

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 \psi_B = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_B. \tag{L.2}$$

Nach einer Eichtransformation mit $\chi = -\Lambda$ folgt $\boldsymbol{A} \to \tilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} + \nabla(-\Lambda) = 0$ und diese Gleichung lautet

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)^2 \tilde{\psi}_B = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi}_B, \tag{L.3}$$

wobei $\tilde{\psi}_B = \psi_B \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}(-\Lambda)\right)$.
Dies ist aber genau die Gleichung für das ausgeschaltete Magnetfeld

$$\frac{1}{2m}\left(\frac{\hbar}{i}\nabla\right)^2 \psi_0 = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi_0. \tag{L.4}$$

Daher folgt, dass

$$\psi_B(\boldsymbol{x}) = \tilde{\psi}_B(\boldsymbol{x}) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\Lambda\right) = \psi_0(\boldsymbol{x}) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\Lambda\right) = \psi_0(\boldsymbol{x}) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\int_{\boldsymbol{x}_0}^{\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{s})\right). \tag{L.5}$$

(b) Es seien ψ_1 und ψ_2 die Wellenfunktionen wo nur der Spalt 1 resp. der Spalt 2 geöffnet ist. Mit (a) finden wir

$$\psi_{1,B}(\boldsymbol{x}) = \psi_{1,0}(\boldsymbol{x}) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\int_1 d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{s})\right) \tag{L.6}$$

$$\psi_{2,B}(\boldsymbol{x}) = \psi_{2,0}(\boldsymbol{x}) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\int_2 d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{s})\right), \tag{L.7}$$

wobei die Wegintegrale 1 resp. 2 von der Quelle durch den jeweiligen Spalt nach $\boldsymbol{x}$ verlaufen. Für den Fall, dass beide Spalten offen sind, bilden wir die Superposition dieser beiden Wellenfunktionen

$$\psi_B(\boldsymbol{x}) = \psi_{1,B}(\boldsymbol{x}) + \psi_{2,B}(\boldsymbol{x}) = \psi_{1,0}(\boldsymbol{x}) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\int_1 d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{s})\right) + \psi_{2,0}(\boldsymbol{x}) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\int_2 d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{s})\right). \tag{L.8}$$

Die relative Phase der beiden Summanden ist

$$\int_1 d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}) - \int_2 d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}) = \oint d\boldsymbol{s} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{s}) = \Phi_B, \tag{L.9}$$

wobei Φ_B der magentische Fluss ist. Somit folgt

$$\psi_B(\boldsymbol{x}) = \left[\psi_{1,0}(\boldsymbol{x}) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\Phi_B\right) + \psi_{2,0}(\boldsymbol{x})\right] \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\int_2 d\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{s})\right) \tag{L.10}$$

und daraus die Intensität des Interferenzmusters

$$I = \left[|\psi_{1,0}(\boldsymbol{x})|^2 + |\psi_{2,0}(\boldsymbol{x})|^2 + 2\mathrm{Re}\left\{\psi^*_{1,0}(\boldsymbol{x})\psi_{2,0}(\boldsymbol{x}) \exp\left(-\frac{ie}{\hbar c}\Phi_B\right)\right\}\right], \tag{L.11}$$

welche vom magnetischen Fluss durch die Ebene abhängt.

Übung 2. Algebra und Eigenschaften des Drehimpulsoperators

(a) Der Bahndrehimpulsoperator ist definiert als $L_i = \epsilon_{ijk}x_j p_k$. Daraus folgt direkt (unter Verwendung der Summenkonvention)

$$\begin{aligned}
[L_i, L_j] &= \epsilon_{imn}\epsilon_{jkl}\,[x_m p_n, x_k p_l] && \text{(L.12)}\\
&= \epsilon_{imn}\epsilon_{jkl}\,(x_m x_k[p_n, p_l] + x_m[p_n, x_k]p_l + x_k[x_m, p_l]p_n + [x_m, x_k]p_l p_n) && \text{(L.13)}\\
&= \epsilon_{imn}\epsilon_{jkl}\,(x_m \underbrace{[p_n, x_k]}_{-i\hbar\delta_{nk}} p_l + x_k \underbrace{[x_m, p_l]}_{i\hbar\delta_{ml}} p_n) && \text{(L.14)}\\
&= i\hbar\,(\underbrace{\epsilon_{mni}\epsilon_{mjk}}_{\delta_{nj}\delta_{ik}-\delta_{nk}\delta_{ij}}\, x_k p_n - \underbrace{\epsilon_{nim}\epsilon_{nlj}}_{\delta_{il}\delta_{mj}-\delta_{ij}\delta_{ml}}\, x_m p_l) && \text{(L.15)}\\
&= i\hbar\,(x_i p_j - x_k p_k \delta_{ij} - x_j p_i + x_k p_k \delta_{ij}) = i\hbar(x_i p_j - x_j p_i) && \text{(L.16)}\\
&= i\hbar\,\underbrace{(\delta_{ir}\delta_{js} - \delta_{jr}\delta_{is})}_{\epsilon_{kij}\epsilon_{krs}}\, x_r p_s = i\hbar\epsilon_{ijk}\epsilon_{krs}x_r p_s = i\hbar\epsilon_{ijk}L_k && \text{(L.17)}
\end{aligned}$$

Hinweis: Diese Vertauschungsrelation ist tatsächlich die definierende Eigenschaft jedes Drehimpulsoperators, wie z.B. des Spins, der kein klassisches Analogon besitzt.

(b)

$$\begin{aligned}
[L_i, \boldsymbol{L}^2] &= [L_i, L_k L_k] = L_k[L_i, L_k] + [L_i, L_k]L_k = i\hbar\epsilon_{ikj}L_k L_j + i\hbar\epsilon_{ikj}L_j L_k && \text{(L.18)}\\
&= i\hbar\epsilon_{ijk}L_j L_k + i\hbar\epsilon_{ikj}L_j L_k \quad \textit{(Umbenennen der Indizes im ersten Term)} && \text{(L.19)}\\
&= i\hbar\epsilon_{ijk}L_j L_k - i\hbar\epsilon_{ijk}L_j L_k = 0 && \text{(L.20)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[L_z, L_\pm] &= [L_z, L_x \pm iL_y] = [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y] = i\hbar\epsilon_{zxy}L_y \mp \hbar\epsilon_{zyx}L_x\hbar && \text{(L.21)}\\
&= \pm\hbar(L_x \pm iL_y) = \pm\hbar L_\pm && \text{(L.22)}
\end{aligned}$$

(c) Aus der Vorlesung sind die Eigenwerte von $\boldsymbol{L}^2$ und L_z

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{L}^2|l, m\rangle &= \hbar^2 l(l+1)\,|l, m\rangle && \text{(L.23)}\\
L_z|l, m\rangle &= \hbar m\,|l, m\rangle && \text{(L.24)}
\end{aligned}$$

und die Wirkung der Auf- und Absteigeoperatoren $L_\pm$ bekannt:

$$L_\pm\,|l, m\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\,|l, m\pm 1\rangle = c_\pm(l, m)\,|l, m\pm 1\rangle\ , \tag{L.25}$$

wobei $c_\pm(l,m) \equiv \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}$.

Weiterhin folgt aus $L_\pm = L_x \pm iL_y$, dass $L_x = (L_+ + L_-)/2$ und $L_y = (L_+ - L_-)/(2i)$. Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\langle L_x \rangle &= \frac{1}{2}\langle l,m|(L_+ + L_-)|l,m\rangle \qquad \text{(L.26)}\\
&= \frac{1}{2}\left[\hbar\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\langle l,m|l,m+1\rangle + \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\langle l,m|l,m-1\rangle\right] \qquad \text{(L.27)}\\
&= 0 \qquad \text{(L.28)}
\end{aligned}
$$

wobei die Orthonormalität

$$\langle l',m'|l,m\rangle = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \qquad \text{(L.29)}$$

verwendet wurde.

Analog folgt für $\langle L_y \rangle$:

$$
\begin{aligned}
\langle L_y \rangle &= \frac{1}{2i}\left[\hbar\sqrt{l(l+1)-m(m+1)}\langle l,m|l,m+1\rangle - \hbar\sqrt{l(l+1)-m(m-1)}\langle l,m|l,m-1\rangle\right] \qquad \text{(L.30)}\\
&= 0 \qquad \text{(L.31)}
\end{aligned}
$$

Nun gilt

$$L_x^2 = \frac{(L_+ + L_-)(L_+ + L_-)}{4} \qquad \text{(L.32)}$$

Im Erwartungswert $\langle L_x^2 \rangle$ verschwinden wiederum die quadratische Terme der Form $L_\pm^2$ auf Grund von Gl. (L.29). Andererseits gilt für die gemischten Terme jedoch:

$$
\begin{aligned}
\langle L_+L_- \rangle &= c_+(l,m-1)\,c_-(l,m) = \hbar^2\sqrt{[l(l+1)-m(m-1)]\,[l(l+1)-(m-1)m]} \qquad \text{(L.33)}\\
&= c_-(l,m)^2 \qquad \text{(L.34)}
\end{aligned}
$$

und analog

$$
\begin{aligned}
\langle L_-L_+ \rangle &= c_-(l,m+1)\,c_+(l,m) = \hbar^2\sqrt{[l(l+1)-m(m+1)]\,[l(l+1)-(m+1)m]} \qquad \text{(L.35)}\\
&= c_+(l,m)^2 \qquad \text{(L.36)}
\end{aligned}
$$

Damit folgt also

$$
\begin{aligned}
\langle L_x^2 \rangle &= \frac{\langle L_-L_+\rangle + \langle L_+L_-\rangle}{4} = \frac{c_+(l,m)^2 + c_-(l,m)^2}{4} \qquad \text{(L.37)}\\
&= \hbar^2\frac{2l(l+1)-2m^2}{4} = \hbar^2\frac{l(l+1)-m^2}{2} \qquad \text{(L.38)}
\end{aligned}
$$

und analog

$$L_y^2 = -\frac{(L_+ - L_-)(L_+ - L_-)}{4} \qquad \text{(L.39)}$$

also:

$$\langle L_y^2 \rangle = \frac{\langle L_+L_-\rangle + \langle L_-L_+\rangle}{4} = \langle L_x^2 \rangle \qquad \text{(L.40)}$$

Bemerkung: selbst für $m = l$ (d.h. der Drehimpuls in z-Richtung ist maximal) gilt:

$$\langle L_x^2 \rangle = \langle L_y^2 \rangle = \hbar^2 \frac{l}{2} \neq 0. \tag{L.41}$$

D.h. der gesamte Drehimpuls $\langle \boldsymbol{L}^2 \rangle$ kann *nie* einen Beitrag aus nur einer Richtung besitzen.

Die Varianz von L_x (analog für L_y) ist gegeben durch:

$$(\Delta L_x)^2 = \langle L_x^2 \rangle - \langle L_x \rangle^2 = \hbar^2 \frac{l(l+1) - m^2}{2} \tag{L.42}$$

$$(\Delta L_x)^2 = \hbar^2 \, \frac{l^2 + l}{2} \quad \text{für } m = 0 \tag{L.43}$$

$$(\Delta L_x)^2 = \hbar^2 \, \frac{l}{2} \quad \text{für } m = \pm l \tag{L.44}$$

Folglich sind die Fluktuationen am größten für $m = 0$, verkleinern sich für $0 \neq m \neq \pm l$ und sind am geringsten für $m = \pm l$, wobei sie aber niemals verschwinden.

(d) Wie vorher gilt

$$L_x L_y = \frac{(L_+ + L_-)(L_+ - L_-)}{4i}. \tag{L.45}$$

Damit überleben nur die folgenden Terme im Erwartungswert

$$\langle L_x L_y \rangle = i \frac{\langle L_+ L_- \rangle - \langle L_- L_+ \rangle}{4} = i \frac{c_-(l,m)^2 - c_+(l,m)^2}{4} = i\hbar^2 \frac{2m}{4} = \frac{1}{2} i\hbar^2 m \tag{L.46}$$

Übung 3. Darstellung des Drehimpulsoperators

(a) $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{L} = \hat{n}_x L_x + \hat{n}_y L_y + \hat{n}_z L_z$. Mit $L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-)$ und $L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-)$ schreiben wir

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{L} = \frac{\hat{n}_x}{2}(L_+ + L_-) + \frac{\hat{n}_y}{2i}(L_+ - L_-) + \hat{n}_z L_z \tag{L.47}$$

$$= \frac{1}{2}(\hat{n}_x - i\hat{n}_y) L_+ + \frac{1}{2}(\hat{n}_x + i\hat{n}_y) L_- + \hat{n}_z L_z. \tag{L.48}$$

Wir wissen:

$$L_z|+\rangle = \frac{\hbar}{2}|+\rangle, \qquad L_z|-\rangle = -\frac{\hbar}{2}|-\rangle \tag{L.49}$$

$$L_+|+\rangle = 0, \qquad L_+|-\rangle = \hbar|+\rangle \tag{L.50}$$

$$L_-|+\rangle = \hbar|-\rangle, \qquad L_-|-\rangle = 0. \tag{L.51}$$

Mit $\alpha = \frac{1}{2}(\hat{n}_x + i\hat{n}_y)$ haben wir $\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{L} = \alpha^* L_+ + \alpha L_- + \hat{n}_z L_z$ und

$$\hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{L} \, |+\rangle = \hbar \left(\alpha|-\rangle + \frac{\hat{n}_z}{2}|+\rangle \right), \quad \hat{\boldsymbol{n}} \cdot \boldsymbol{L} \, |-\rangle = \hbar \left(\alpha^*|+\rangle - \frac{\hat{n}_z}{2}|-\rangle \right). \tag{L.52}$$

Daher:

$$(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{L})^2\ |+\rangle = \hbar^2\left(\alpha^*\alpha|+\rangle - \alpha\frac{\hat{n}_z}{2}|-\rangle + \alpha\frac{\hat{n}_z}{2}|-\rangle + \frac{\hat{n}_z^2}{4}|+\rangle\right) \tag{L.53}$$

$$= \hbar^2\left(|\alpha|^2|+\rangle + \frac{\hat{n}_z^2}{4}|+\rangle\right) \tag{L.54}$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}|+\rangle \tag{L.55}$$

weil $\hat{\boldsymbol{n}}^2 = 1$ und $|\alpha|^2 = \frac{1}{4}\left(\hat{n}_x^2 + \hat{n}_y^2\right) = \frac{1}{4}\left(\hat{\boldsymbol{n}}^2 - \hat{n}_z^2\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \hat{n}_z^2\right)$.
Ebenso gilt,

$$(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{L})^2\ |-\rangle = \hbar^2\left(\alpha^*\alpha|-\rangle + \alpha^*\frac{\hat{n}_z}{2}|+\rangle - \alpha^*\frac{\hat{n}_z}{2}|+\rangle + \frac{\hat{n}_z^2}{4}|1\rangle\right) = \frac{\hbar^2}{4}|-\rangle. \tag{L.56}$$

(b) Definiere $\boldsymbol{\omega} = \omega\hat{\boldsymbol{n}}$.

$$U_{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{-i}{\hbar}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{L}\right)^k \tag{L.57}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^{2k}}{(2k)!}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\hbar}\cdot\boldsymbol{L}\right)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-i)^{2k+1}}{(2k+1)!}\left(\frac{\boldsymbol{\omega}}{\hbar}\cdot\boldsymbol{L}\right)^{2k+1} \tag{L.58}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{\omega}{\hbar}\right)^{2k}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{L})^{2k} - i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{\omega}{\hbar}\right)^{2k+1}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{L})^{2k+1}. \tag{L.59}$$

Aus (a), $(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{L})^{2k}|\pm\rangle = \left(\frac{\hbar}{2}\right)^{2k}|\pm\rangle$. Daher,

$$U_{\boldsymbol{\omega}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2k}\mathbb{I} - i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\left(\frac{\omega}{2}\right)^{2k+1}\frac{2}{\hbar}(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{L}) \tag{L.60}$$

$$= \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\mathbb{I} - \frac{2i}{\hbar}\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)(\hat{\boldsymbol{n}}\cdot\boldsymbol{L}) \tag{L.61}$$

D.h.: Eine Drehung um 2π gibt nicht den Ausgangszustand, sondern ändert das Vorzeichen desselben: $U_{2\pi\hat{\boldsymbol{n}}} = -U_{0\hat{\boldsymbol{n}}}$.

(c) Es ist:

$$L_z\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad L_z\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow L_z = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \tag{L.62}$$

$$L_+\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \qquad L_+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow L_+ = \hbar\begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix} \tag{L.63}$$

$$L_-\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \hbar\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \qquad L_-\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow L_- = \hbar\begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}. \tag{L.64}$$

Also,

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \qquad L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-) = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix} \tag{L.65}$$

$$\boldsymbol{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = \frac{3\hbar^2}{4}\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix} \tag{L.66}$$

(Beachte: L_x, L_y und L_z sind proportional zu den berühmten Pauli-Matrizen).

(d) Wie in (c),

$$L_z \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \hbar \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad L_z \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad L_z \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = -\hbar \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{L.67}$$

$$\Rightarrow L_z = \hbar \begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix} \tag{L.68}$$

$$L_+ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad L_+ \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \quad L_+ \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \tag{L.69}$$

$$\Rightarrow L_+ = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \tag{L.70}$$

$$L_- \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad L_- \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \quad L_- \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \tag{L.71}$$

$$\Rightarrow L_- = \sqrt{2}\hbar \begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix} \tag{L.72}$$

Also,

$$L_x = \frac{1}{2}(L_+ + L_-) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}, \quad L_y = \frac{1}{2i}(L_+ - L_-) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix} \tag{L.73}$$

$$\boldsymbol{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = 2\hbar^2 \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}. \tag{L.74}$$