1 Einteilchenphysik in 1 – 3 dim

1. *[3 Punkte] Betrachte ein Teilchen in 2D, welches auf einen Streifen (d.h. $x \in \mathbb{R}$ und $|y| < w/2$) eingeschränkt ist. Welcher Hamilton-Operator beschreibt dieses System und welche Symmetrien besitzt er? Finde die stationären Lösungen für das Teilchen und bestimme das Energiespektrum $E_n(k)$. Zeichne das Spektrum.*

Lösung

1. Der Hamilton-Operator ist von der Form

$$H = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + V(y) \qquad \text{[0.5 Pkt]} \tag{L.1}$$

$$= -\frac{\hbar^2}{2m}(\partial_x^2 + \partial_y^2) + V(y) \tag{L.2}$$

mit $V(y) = 0$ für $|y| < w/2$ und $V(y) = \infty$ sonst.
Der Hamilton-Operator besitzt eine kontinuierliche Translations-Symmetrie T_x entlang x, ist inversionssymmetrisch $\mathcal{P}$ und invariant unter Zeitumkehr $\mathcal{T}$ und es existiert eine Translationsinvarianz T_t in der Zeit ([0.5 Pkt] für 2 Symmetrien).

Die stationären Lösungen $\psi_{n,k}(x, y)$ erfüllen die zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$H\psi_{n,k} = E_n(k)\psi_{n,k} \tag{L.3}$$

Da die beiden Variablen separieren, schreiben wir $\psi_{n,k}(x, y) = \chi_k(x)\phi_n(y)$, wobei

$$\chi_k(x) = e^{ikx} \qquad \text{(Freies Teilchen entlang } x\text{)} \tag{L.4}$$

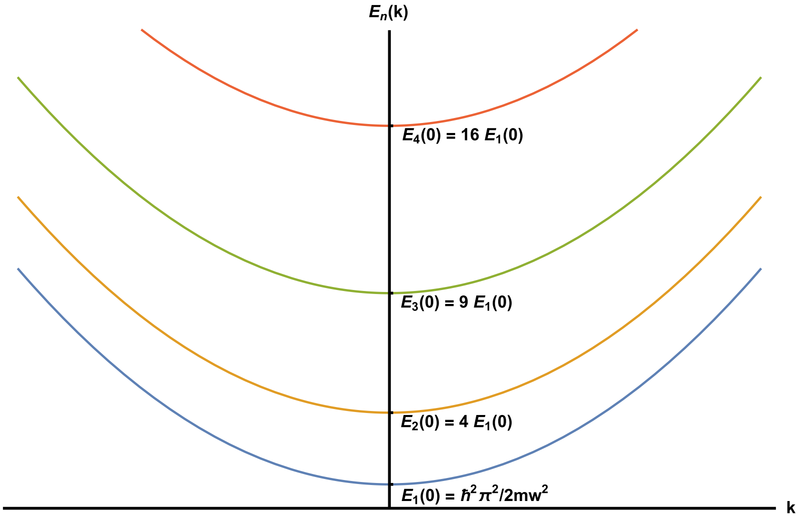
$$\phi_n(y) = \begin{cases} \sin(\pi n y/w) \text{ für } n \geq 2 \text{ gerade} \\ \cos(\pi n y/w) \text{ für } n \geq 1 \text{ ungerade} \end{cases} \qquad \text{[1 Pkt]} \tag{L.5}$$

(Teilchen im unendlichen Topf entlang y)

mit $k \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Die Energie ist dann gegeben durch

$$E_n(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mw^2} \quad \text{[0.5 Pkt]} \tag{L.6}$$



[0.5 Pkt]

Keine Achsenbeschriftung und/oder kein Gap [-0.25 Pkt].

2 Streuphysik in 1D

1. *[1 Punkt] Leite für eine allgemeine Streumatrix S die zugehörige Transfermatrix M her.*
2. *[1 Punkt] Gib die asymptotische Form der Wellenfunktion einer von links einfallenden, ebenen Welle e^{ikx} an, welche an einem kurzreichweitigen Potential $V(x)$ streut.*

Lösung The following equations were required in order to solve this problem and were derived earlier in the exam.

$$\psi_{\text{out}} = S\psi_{\text{in}}, \qquad \text{with} \qquad \psi_{\text{out}} = \begin{pmatrix} b \\ A \end{pmatrix} \qquad \text{and} \qquad \psi_{\text{in}} = \begin{pmatrix} a \\ B \end{pmatrix}, \tag{L.7}$$

$$S = \begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix} \tag{L.8}$$

1. Die Transfermatrix M verbindet die Amplituden der Welle ψ_L links vom Streuer mit der Amplitude ψ_R rechts davon, via

$$\psi_L = M\psi_R, \qquad \text{mit} \qquad \psi_L = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \psi_R = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}, \tag{L.9}$$

wobei a, b, A, B die Wellenanteile gemäss B.1 definiert sind. Ausgehend von Gln. (L.7) und (L.8) gilt

$$\begin{cases} b = ra + t'B \\ A = ta + r'B \end{cases} \tag{L.10}$$

und aufgelöst nach a und b gilt

$$\begin{cases} a = (1/t)A - (r'/t)B \\ b = (r/t)A + (t' - rr'/t)B \end{cases} \tag{L.11}$$

und die Transfermatrix lässt sich schreiben als

$$M = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 1 & -r' \\ r & tt' - rr' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/t & r^*/t'^* \\ r/t & 1/t'^* \end{pmatrix}, \qquad \text{[1 Pkt]} \tag{L.12}$$

Solution with $r = r'$ and $t = t'$ is ok.

2. If the scattering potential is in the region of the origin (e.g. $V(x) = 0$ for $|x| > x_0$) and there is a particle incident from left, then the asymptotic wavefunction is given as:

$$\Psi(x) \quad \sim \quad \begin{cases} e^{ikx} + re^{-ikx}, & x \to -\infty \\ te^{ikx}, & x \to \infty \end{cases} \qquad \text{[1 Pkt]} \tag{L.13}$$

The reflection probability is $|r|^2$ and the transmission probability is $|t|^2$.

3 Physik in 3D

1. *[1 Punkt] Betrachte ein rotationssymmetrisches Potential und reduziere die 3D-Schrödingergleichung eines Teilchens auf eine effektive 1D Schrödingergleichung.*
2. *[4 Punkte] Gebundene Zustände eines attraktiven Potentials entsprechen Polen der Streuamplitude s_l. Zeige, dass dieses Kriterium auf die Bedingung $\cot\delta_l = i$ führt.*
   Hinweis: Betrachte $s_l - 1$.
   Betrachte nun niedrig-energetische Streuung an einem attraktiven Potential beschrieben durch seine Streulänge $a > 0$ und bestimme die Energie eines (schwach) gebundenen Zustandes.

Lösung

1. Für ein rotationssymmetrisches Potential lässt sich die Schrödingergleichung in 3D mit dem Ansatz $\psi(\boldsymbol{r}) = R_l(r)Y_{lm}(\theta,\varphi)$ auf die 1D-Gleichung

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\big(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r\big) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r)\Big]R_l(r) = ER_l(r) \qquad \text{[0.5 Pkt]} \tag{L.14}$$

reduzieren. Mit dem Ansatz $R_l(r) = u_l(r)/r$ finden wir

$$\Big[-\frac{\hbar^2}{2m}\partial_r^2 + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r)\Big]u_l(r) = Eu_l(r). \qquad \text{[0.5 Pkt]} \tag{L.15}$$

(0.25 Pkt) für zwei Ansätze.

2. Die Streuamplitude s_l lässt sich durch die Phase δ_l ausdrücken als $s_l = e^{2i\delta_l}$. [1 Pkt]

Somit folgt

$$s_l - 1 = e^{2i\delta_l} - 1 = 2ie^{i\delta_l}\sin\delta_l = 2i\frac{\sin\delta_l}{\cos\delta_l - i\sin\delta_l} = \frac{2i}{\cot\delta_l - i}. \qquad \text{[1 Pkt]} \tag{L.16}$$

Somit entsprechen Pole der Streuamplitude s_l genau der Bedingung $\cot\delta_l = i$.

Die Streulänge ist definiert als

$$k\cot\delta_0 = -\frac{1}{a} \qquad \text{[1 Pkt]} \tag{L.17}$$

im Grenzwert kleiner k. Andererseits sind Pole der Streumatrix bestimmt durch $\cot\delta_0 = i$, sodass wir die Gleichung $-1/(ak) = i$ als Bestimmungsgleichung für gebundene Zustände finden. Diese Gleichung führt auf negative Energien, für welche wir $ik \to -\kappa$ ersetzen, mit $\kappa = \sqrt{-2mE_B}/\hbar$. Dies liefert

$$E_B = -\frac{\hbar^2}{2ma^2}. \qquad \text{[1 Pkt]} \tag{L.18}$$

4 Formalismus und Approximative Methoden

1. *[3 Punkte] Betrachte ein Teilchen in einer Box mit Volumen L^3 mit normierten Wellenfunktionen $\psi_k(\boldsymbol{r}) = e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}/\sqrt{L^3}$. Berechne die Zerfallsrate eines Zustandes $|\psi_k\rangle$ in Anwesenheit eines Deltapotentials $V(\boldsymbol{r}) = V_0\,\delta(\boldsymbol{r})$.*

Lösung

1. Wir berechnen zuerst das Matrixelement für einen Übergang zwischen den Zuständen $|\psi_{\boldsymbol{k}}\rangle$ und $|\psi_{\boldsymbol{k}'}\rangle$,

$$\langle\psi_{\boldsymbol{k}'}|V|\psi_{\boldsymbol{k}}\rangle = \int d^3\boldsymbol{x}\;\psi^*_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{x})\;V(\boldsymbol{x})\;\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{x}) \tag{L.19}$$

$$= \frac{1}{L^3}\int d^3\boldsymbol{x}\;e^{-i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{x}}\,V_0\,\delta(\boldsymbol{x})\;e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x}} = \frac{V_0}{L^3}\;. \qquad \text{[1 Pkt]} \tag{L.20}$$

Dann rechnen wir die Zustandsdichte für eine gegebene Energie ϵ_i:

$$\rho(\epsilon_i) = \sum_{\boldsymbol{k}}\delta(\epsilon_{\boldsymbol{k}}-\epsilon_i) = L^3\int\frac{d^3\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\,\delta(\epsilon_{\boldsymbol{k}}-\epsilon_i) = L^3\underbrace{\int\frac{d\Omega}{4\pi}}_{=1}\int\frac{dk}{2\pi^2}\,k^2\,\delta(\epsilon_{\boldsymbol{k}}-\epsilon_i)\;. \tag{L.21}$$

Mit $\epsilon_{\boldsymbol{k}} = \hbar^2k^2/(2m)$ und $k = \sqrt{2m\epsilon_{\boldsymbol{k}}}/\hbar$ folgt

$$dk = \frac{\sqrt{2m}}{\hbar}\cdot\frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}\cdot d\epsilon = \frac{m}{\hbar\sqrt{2m\epsilon}}d\epsilon \tag{L.22}$$

und somit folgt für (L.21):

$$\rho(\epsilon_i) = L^3\int\frac{d\epsilon}{2\pi^2}\,\frac{m}{\hbar\sqrt{2m\epsilon}}\,\frac{2m\epsilon}{\hbar^2}\,\delta(\epsilon-\epsilon_i) = \frac{L^3m}{2\,\hbar^3\pi^2}\int d\epsilon\,\sqrt{2m\epsilon}\,\delta(\epsilon-\epsilon_i) \tag{L.23}$$

$$= \frac{L^3m\,\sqrt{2m\epsilon_i}}{2\,\hbar^3\pi^2}\;. \qquad \text{[1 Pkt]} \tag{L.24}$$

Jetzt können wir Fermis Goldene Regel anwenden:

$$\Gamma = \frac{2\pi}{\hbar}\cdot\frac{V_0^2}{L^6}\cdot\frac{L^3m\sqrt{2m\epsilon_i}}{2\,\hbar^3\pi^2} = \left.\frac{m\,V_0^2\,\sqrt{2m\epsilon_f}}{\hbar^4\,\pi\,L^3}\right|_{\epsilon_f=\epsilon_i}\;, \qquad \text{[1 Pkt]} \tag{L.25}$$

was uns die gewünschte Zerfallsrate ergibt.
Kommentar: Faktoren L^3 werden nicht korrigiert.

5 Spins und Dichtematrizen

1. *[1 Punkt] Betrachte ein Elektron im magnetischen Feld. Wie lautet der Spin-Anteil des Hamilton-Operators (in elementaren physikalischen Grössen e, m_e, ...)?*
2. *[3 Punkte] Schreibe die Singlett- und Triplett-Zustände für zwei Spin-1/2-Teilchen in der Produktbasis der beiden Spins und in der Gesamtdrehimpuls-Basis. Welche Clebsch-Gordan-Koeffizienten kommen in diesem Problem vor?*

Lösung

1. Das intrinsische magnetische Moment eines Elektrons ist gegeben durch

$$\boldsymbol{\mu}_e = -g\frac{e}{2m_e c}\boldsymbol{S}, \qquad [0.5 \text{ Pkt}] \tag{L.26}$$

mit dem Landé-Faktor $g = 2 + \alpha/\pi + \ldots$, und $e > 0$. Beachte, dass $\boldsymbol{\mu}_e$ und $\boldsymbol{S}$ anti-parallel sind. Der Hamilton-Operator eines magnetischen Momentes in einem Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ ist

$$H_B = -\boldsymbol{\mu}_e \cdot \boldsymbol{B} \qquad [0.5 \text{ Pkt}] \tag{L.27}$$

$$= +g\frac{e}{2m_e c}\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{B} = g\mu_B\frac{\boldsymbol{S}}{\hbar}\cdot\boldsymbol{B} \approx \mu_B\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{B}. \tag{L.28}$$

Das Bohr'sche Magneton ist $\mu_B = e\hbar/2m_e c$.

2. Die Gesamtdrehimpuls-Basis $\{|j,m\rangle\}$ wird definiert durch

$$J^2|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j,m\rangle, \tag{L.29}$$

$$J_z|j,m\rangle = m\hbar|j,m\rangle, \qquad [0.5 \text{ Pkt}] \tag{L.30}$$

mit J^2 und J_z, die Operatoren zum Gesamtdrehimpuls respektive dessen z-Komponente. Die möglichen Gesamtdrehimpulse ergeben sich aus der Spinaddition zweier Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen: $\mathcal{H}_{\frac{1}{2}} \otimes \mathcal{H}_{\frac{1}{2}} = \mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_1$. Der Singlett-Zustand $|0,0\rangle$ gehört zu $\mathcal{H}_0$ und die Triplett-Zustände $\{|1,-1\rangle, |1,0\rangle, |0,1\rangle\}$ gehören zu $\mathcal{H}_1$ [0.5 Pkt].

In der Produktbasis $\{|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle\}$ (mit $\uparrow \Leftrightarrow m = +1/2$, $\downarrow \Leftrightarrow = -1/2$) nehmen die Singlett- und Triplett-Zustände folgende Form an [1 Pkt]

$\lvert j,m\rangle$	$\sum_{m_1,m_2} c_{jm,m_1m_2}\lvert m_1,m_2\rangle$
$\lvert 0,0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\lvert\uparrow\downarrow\rangle - \lvert\downarrow\uparrow\rangle\right]$
$\lvert 1,1\rangle$	$\lvert\uparrow\uparrow\rangle$
$\lvert 1,0\rangle$	$\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\lvert\uparrow\downarrow\rangle + \lvert\downarrow\uparrow\rangle\right]$
$\lvert 1,-1\rangle$	$\lvert\downarrow\downarrow\rangle$

In der obigen Tabelle sind die Amplituden c_{jm,m_1m_2} gerade die Clebsch-Gordon-Koeffizienten. Diese geben die Basistransformation von der Produkt-Basis in die Gesamtdrehimpuls-Basis an,

$$\begin{pmatrix} |1,1\rangle \\ |1,0\rangle \\ |0,0\rangle \\ |1,-1\rangle \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\uparrow\downarrow\rangle \\ |\downarrow\uparrow\rangle \\ |\downarrow\downarrow\rangle \end{pmatrix} \qquad \text{[1 Pkt]} \tag{L.31}$$

und nehmen Werte $0, 1, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ an.